Guía teórica del curso de nivelación de Matemática

Conjuntos numéricos – Expresiones algebraicas - Funciones – Geometría del plano y del espacio.

Coordinadora: Prof. Lic. Lorena Belfiori
Año: 2017

Tabla de contenido

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales.

En la segunda mitad del siglo XIX, el matemático Leopold Krönecker (1823 – 1891), sostuvo que los números naturales eran obra de Dios y todo lo demás, en Matemática, obra del hombre, contraponiéndose a muchos de los matemáticos contemporáneos.

Cuando comenzó la actividad humana, surgió la necesidad de los pueblos primitivos de contar o enumerar los elementos de ciertos conjuntos y para ello se utilizaron los **números naturales.**

El conjunto de todos los números naturales se simboliza mediante la letra $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots.\}$

Los puntos suspensivos indican que los números continúan de esa forma, sin terminar nunca.

La adición de dos números naturales da como resultado otro número natural, por ejemplo: 8 + 5 = 13. Pero si se restan dos números naturales iguales, por ejemplo 5 – 5, se necesita otro conjunto numérico que contenga al representante del resultado (el cero)

El conjunto de todos los números naturales con el cero (**números cardinales)** se simboliza mediante $\mathbb{N}_0$.

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots.\}$

Expresiones cotidianas tales como: "10 grados bajo cero", "647 pesos en débito", "8 metros bajo el nivel del mar", se refieren a números menores que cero. Con estas situaciones surgen los enteros negativos. Los enteros negativos, el cero y los números naturales (también conocidos por enteros positivos) forman el conjunto de los **números enteros**.

El conjunto de los **números enteros** se representa con la letra $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}=\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$.

Si se divide dos enteros no siempre se obtiene otro entero. Por ejemplo, 16 ÷ 2 = 8 pero en 3 ÷ 4 el resultado no es un entero. Existen muchas divisiones donde el resultado no es un entero. Esta situación lleva a otro conjunto numérico conocido como los **números racionales**.

Los **números racionales** son todos aquellos números que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$ donde b es diferente de cero. **Los números naturales, los cardinales y los enteros son números racionales.**

El conjunto de los **números racionales** se representa con la letra $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} =\{x/x = \frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N}\}$

Algunos ejemplos de números racionales son:

$$\frac{5}{4}, -\frac{7}{8}, 2\frac{3}{4}, \sqrt{25}, 1.25, \frac{6}{100}, 0.33333....$$

Existe otro conjunto de números que son los **números irracionales**, estos son números que no son racionales, es decir, no se pueden expresar nunca como cociente o razón de dos números enteros.
Ejemplos de números irracionales:
- Números que, aunque tienen infinitas cifras decimales, éstas no forman período como el número 0,12345678910111213141516...
-Todas las raíces enésimas no exactas son irracionales, como $\sqrt{3}$, también son irracionales el número π y el número e.

El conjunto de los **números reales** es el conjunto de todos los números racionales y todos los números irracionales.

El conjunto de los **números reales** se representa con la letra $\mathbb{R}$
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup Irracionales$

Propiedades de los conjuntos numéricos

Algunas propiedades importantes de los conjuntos numéricos son:

- $\mathbb{N}$ tiene un primer elemento (el uno) pero no tiene un último elemento, es por lo tanto, un conjunto infinito
- Todo número natural a, tiene su sucesor a +1.
- El valor de los números naturales crece hacia la derecha si se considera su representación en la recta numérica, es decir que los números naturales tienen la propiedad de ser un conjunto de elementos ordenados.
- $\mathbb{Z}$ no tiene primero ni último elemento, por lo que es un conjunto infinito.
- Cada número entero tiene un antecesor y un sucesor.
- $\mathbb{Z}$ es un conjunto discreto.
- Todo número entero a tiene su opuesto -a, tal que a + (-a) = 0
- Entre dos números racionales existen infinitos números racionales, por eso $\mathbb{Q}$ no es discreto sino que es un conjunto denso. Como consecuencia de esto, no puede hablarse de números racionales consecutivos.
- $\mathbb{Q}$ no tiene primero ni último elemento.
- El conjunto $\mathbb{R}$ es denso (o sea que entre dos reales siempre existe otro real), pero se diferencia de los números racionales, porque en $\mathbb{R}$ los huecos de $\mathbb{Q}$ han sido ocupados por los irracionales, con lo que podemos afirmar que los reales cubren toda la recta numérica.

Operaciones

Algunas consideraciones acerca de las operaciones:

ADICIÓN: a + b = c, donde a y b se llaman sumando y c es la suma.

La adición en $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, Irracionales\ y\ \mathbb{R}$ cumple con las propiedades:
Conmutativa: a + b = b + a
Asociativa: (a + b) + c= a + (b + c)
Elemento neutro: a + 0 = a (Es muy importante tener en cuenta las convenciones de la definición de los números naturales, ya que en algunos textos se considera a $\mathbb{N}$ como el conjunto de los naturales con el cero y en otros textos, como en este, $\mathbb{N}$ no contiene a ese elemento por lo que, según nuestra convención en $\mathbb{N}$ no existe el elemento neutro).
NOTA: En el conjunto de los números irracionales la adición no es una operación cerrada, es decir que no siempre que se opere dos números irracionales el resultado es un número irracional.

SUSTRACCIÓN: a – b = c, donde a es el minuendo, b es el sustraendo y c es la resta.

MULTIPLICACIÓN: a . b = c, donde a y b son los factores y c es el producto.
La multiplicación en $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, Irracionales\ y\ \mathbb{R}$ tiene las propiedades:
Conmutativa: a . b = b . a
Asociativa: (a . b) . c= a . (b . c)
Elemento neutro: a . 1 = a
NOTA: En el conjunto de los números irracionales la multiplicación no es una operación cerrada.

DIVISIÓN: a : b = c, donde a es el dividendo, b es el divisor y c es el cociente.

POTENCIACIÓN: a^b= c, donde a es la base, b es el exponente y c la potencia.
La potenciación tiene algunas propiedades:
Producto de Potencias de igual base: $a^x . a^y = a^{x+y}$
Cociente de Potencias de igual base: $a^x : a^y = a^{x-y}$
Potencia de otra Potencia: $(a^x)^y = a^{x.y}$
Potencia de exponente cero: $a^0 = 1\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$
Potencia de exponente negativo: $a^{-b} = \frac{1}{a^b}\ con\ a \neq 0$
Distributividad respecto del producto y cociente: $(a.b)^n = a^n . b^n\ \ y\ (a:b)^n = a^n : b^n$

Recordar:
La potenciación NO es distributiva respecto de la adición y sustracción:
$(a+b)^n \neq a^n + b^n\ \ y\ (a-b)^n \neq a^n - b^n$

RADICACIÓN: $\sqrt[n]{a}$=b, donde n es el índice, a es el radicando y b es la raíz.
La radicación tiene algunas propiedades:
Raíz de una potencia o potencia de una raíz: $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ si el índice es impar o el índice es par y a es positivo.
Raíz de otra raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
Producto del índice y exponente por un mismo número: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$
Distributividad respecto de la multiplicación y división: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\ y\ \sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$
Simplificación de índices: Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ y si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Recordar:
La Radicación NO ES DISTRIBUTIVA respecto de la suma y la resta
$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ y $\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$

LOGARITMACIÓN: $log_a b = c$, donde a es la base (debe ser positivo y distinto de 0), b es el argumento (debe ser positivo) y c es el logaritmo. La logaritmación se define como la operación inversa de la potenciación, es decir, $log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$.
La logaritmación cumple con algunas propiedades:

$$log_a a = 1$$
$$log_a 1 = 0$$
$$log_a b + log_a c = log_a (b.c)$$
$$log_a b - log_a c = log_a (b:c)$$
$$log_a b^n = n.log_a b$$

VALOR ABSOLUTO O MÓDULO: El valor absoluto de un número real “x” se denota por |x| y representa la distancia de cualquiera de los números x y –x al origen (o cero).
Se define como:
$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ por lo que $|x| \geq 0$ *siempre.*
Propiedades que cumple:
$|x| = a \Leftrightarrow x = a \lor x = -a$
$|x| > a \Leftrightarrow x > a \lor x < -a$
$|x| < a \Leftrightarrow x > -a \land x < a, es\ decir, -a < x < a$

Divisibilidad en $\mathbb{Z}$

Un número entero $x \neq 0$ es divisor de otro número entero y si existe un tercer número z tal que se verifica que y=x.z. Es decir, $x|y \Leftrightarrow \exists z \in Z / y = x \cdot z$. Se lee “x divide a y sí y sólo sí existe un z entero que verifica que y es igual a x por z”.
El **máximo común divisor** entre dos números enteros (d) es el mayor de los divisores comunes a ambos números.
Matemáticamente se define de acuerdo a la siguiente expresión:

$$d = (a;b) \Leftrightarrow \begin{cases} d|a \land d|b \\ d'|a \land d'|b \Rightarrow d'|d \end{cases}$$

La lectura es “d es el máximo común divisor de a y b sí y sólo sí se verifican dos condiciones: d divide a ambos elementos; y cualquier otro divisor común de ambos números es también divisor de d”. Esto último implica que d es mayor o igual que cualquier otro de los divisores comunes de ambos números.

Algunas propiedades:

Todo máximo común divisor de dos elementos es una combinación lineal de esos elementos con coeficientes enteros. Es decir, $d = (a;b) \Rightarrow \exists s,t \in Z / d = s \cdot a + t \cdot b$. La lectura de esto es "Si d es el máximo común divisor de a y b, entonces existen dos enteros s y t que verifican que d es igual a la suma de s por a más t por b". esta propiedad sirve para probar que un número es, de hecho, el máximo común divisor entre dos enteros dados. Más adelante se verá cómo podemos hallar algorítmicamente esos dos enteros s y t. Por ejemplo, $5=(15;20)\Rightarrow \exists 3,-2\in Z/5=3\cdot 15+(-2)\cdot 20$

Un número entero b, distinto de 0, 1 y –1, se llama PRIMO si y solo si admite solo cuatro divisores: 1, –1, el mismo número y su opuesto.

Dos números son coprimos cuando su máximo común divisor es 1.
Es decir que si a y b son coprimos, entonces existen dos números enteros que en combinación lineal con ellos da 1.

Los números distintos de 0, 1 y -1 que admiten más de cuatro divisores son números COMPUESTOS

Observación: 1 y –1 no son números primos ni compuestos.

Operaciones en $\mathbb{Q}$

Adición: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{b.d}$ Esta expresión puede simplificarse si el numerador y denominador son múltiplos de algún valor, o bien trabajarse directamente con fracciones equivalentes con igual denominador y sumarse sólo los numeradores.

Ejemplo:

$\frac{1}{25}+\frac{3}{15}=\frac{3}{75}+\frac{15}{75}=\frac{18}{75}=\frac{6}{25}$ En este ejemplo se buscaron fracciones equivalentes y luego se simplificó el resultado porque tanto numerador como denominador son múltiplos de 3.

Otra forma de resolverlo, usando la fórmula dada: $\frac{1}{25}+\frac{3}{15}=\frac{1.15+3.25}{25.15}=\frac{90}{375}=\frac{6}{25}$

Sustracción: para restar dos fracciones, simplemente sumamos al minuendo el opuesto del sustraendo $\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{a.d-b.c}{b.d}$

Multiplicación: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$ Esta expresión puede simplificarse si el numerador y denominador son múltiplos de algún valor.

División: el cociente se resuelve multiplicando el dividendo por el recíproco o inverso del divisor: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}$

Potenciación: la potenciación puede hacerse en el conjunto de los números racionales para base racional y exponente entero: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

Radicación: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\left(\frac{c}{d}\right)^n=\frac{a}{b}$

Intervalos en los números reales

El orden en los números reales permite hablar del conjunto de números reales comprendidos entre dos números reales determinados.

Si se toman dos números reales, tales que el primero sea menor que el segundo, ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ $tal\ que$ $a < b$), existe una infinidad de números reales en este intervalo, "x" tales que $a < x < b$, esos números forman subconjuntos de los reales llamados intervalos.

Según si se incluyen o no los extremos "a" y "b", los intervalos se llaman: cerrado, abierto o semiabiertos.

El intervalo cerrado incluye a los extremos y a los reales entre los extremos, su notación por comprensión es: $[a, b]=\{ x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$.

El intervalo abierto incluye a los reales entre los extremos pero no a ellos: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

El intervalo semiabierto incluye a un extremo y a los reales entre los extremos:

Semiabierto por la derecha: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$.

Semiabierto por la izquierda: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es cualquier combinación de variables (letras) y constantes (números) relacionados entre sí por las operaciones definidas en el conjunto numérico en el cual se está trabajando.

Polinomios

Un **polinomio** es expresión algebraica que posee una sola variable.
Dicha variable tiene exponentes naturales.
(Poli = muchos; Nomio = término)

Los **coeficientes** del polinomio son los números que multiplican a la variable. Se llama **coeficiente principal** al número que multiplica a la variable de mayor exponente.
El término sin variable (elevada a la cero) se llama **término independiente**.
El **grado** de un polinomio es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable.

Operaciones con polinomios

Adición de polinomios

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

Ejemplo: Resolver P(x) + Q(x) siendo

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

$Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$

1. Ordenar los polinomios, si no lo están.

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2. Agrupar los monomios del mismo grado.

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$

3. Sumar los monomios semejantes.

$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$

Sustracción de polinomios

La resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo

Ejemplo:

$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$
$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$
$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$

Multiplicación de un número por un polinomio

Es otro polinomio que tiene el mismo grado del polinomio y como coeficientes el producto de los coeficientes del polinomio por el número.

Ejemplo:

$3 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

Multiplicación de polinomios

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio.

Ejemplo: $P(x) = 2x^2 - 3 \quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$
$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$
Se suman los monomios del mismo grado.
$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$
Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

También se puede multiplicar polinomios de siguiente modo:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ 2x^2 - 3 \\ \hline -6x^3 + 9x^2 - 12x \\ 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 \qquad\qquad \\ \hline 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x \end{array}$$

División de polinomios

Ejemplo: $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8 \qquad Q(x) = x^2 - 2x + 1$, resolver **P(x) : Q(x)**

A la izquierda se sitúa el dividendo. Si el polinomio no es completo se dejan huecos en los lugares que correspondan.

$$x^5 \qquad\qquad + 2x^3 \qquad\qquad - x - 8 \qquad\qquad \underline{|\, x^2 - 2x + 1 \quad}$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Se divide el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$x^5 : x^2 = x^3$

Se multiplica cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y se lo resta del polinomio dividendo:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & x^3 \\
\qquad 2x^4 + x^3 \qquad - x - 8 &
\end{array}
$$

Se vuelve a dividir el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado se lo multiplica por el divisor y se lo resta al dividendo.

$2x^4 : x^2 = 2\ x^2$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & x^3 + 2x^2 \\
\qquad 2x^4 + x^3 \qquad - x - 8 & \\
\quad \underline{- 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \qquad} & \\
\qquad\qquad 5x^3 - 2x^2 - x - 8 &
\end{array}
$$

Se procede de igual manera que antes.

$5x^3 : x^2 = 5\ x$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & x^3 + 2x^2 + 5x \\
\qquad 2x^4 + x^3 \qquad - x - 8 & \\
\quad \underline{- 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \qquad} & \\
\qquad\qquad 5x^3 - 2x^2 - x - 8 & \\
\qquad\quad \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} & \\
\qquad\qquad\qquad 8x^2 - 6x - 8 &
\end{array}
$$

Se vuelven a hacer las mismas operaciones.

$8x^2 : x^2 = 8$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\
\qquad 2x^4 + x^3 & \\
\quad \underline{- 2x^4 + 4x^3 - 2x^2} & \\
\qquad\qquad 5x^3 - 2x^2 - x & \\
\qquad\quad \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} & \\
\qquad\qquad\qquad 8x^2 - 6x - 8 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{- 8x^2 + 16x - 8} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 10x - 16 &
\end{array}
$$

$10x - 6$ es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo. $\mathbf{x^3+2x^2+5x+8}$ es el **cociente**.

Si el divisor es un binomio de la forma x - a, entonces utilizamos un método más breve para hacer la división, llamado **regla de Ruffini.**

Regla de Ruffini la división:

Ejemplo: $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

1. Si el polinomio dividendo no es completo, se completa añadiendo los términos que faltan con ceros.

2. Se colocan los coeficientes del dividendo en una línea.

3. Abajo a la izquierda se coloca el opuesto del término independiente del divisor.

4. Se traza una raya y se baja el primer coeficiente.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

5. Se multiplica ese coeficiente por el divisor y se lo colocadebajo del siguiente término.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

6. Se suman los dos coeficientes.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & 3 & & & \end{array}$$

7. Se repite el proceso anterior.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & & \\ \hline & 1 & 3 & 6 & & \end{array}$$

Se vuelve a repetir el proceso.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & \end{array}$$

Se vuelve a repetir.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & \underline{|56} \end{array}$$

8. El último número obtenido**,** 56, es el resto**.**

9. El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido: $x^3 + 3x^2 + 6x + 18$

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma (x − a) es el valor numérico de dicho polinomio para el valor: x= a.

Ejemplo: Calcular, por el teorema del resto, el resto de la división:
$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$
$P(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 =$ **56**
Se comprueba la solución efectuando la división por Ruffini.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

Ecuaciones

Se denomina **ecuación** a toda igualdad en la que aparecen una o más variables

Conjunto Solución de una Ecuación: Es el conjunto de todos los valores de la variable o incógnita que verifican la ecuación.

Ejemplos

a) $2x^3 - 4x = 0$ Ecuación en variable *x*, cuyo conjunto solución es: S = $\{-\sqrt{2}\ ; 0\ ; \sqrt{2}\}$

b) $\frac{2y}{y+1} = 0$ $(y \neq -1)$ Ecuación en variable *y*, cuyo conjunto solución es: S = {0}

c) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3$ $(x \geq 0)$ Ecuación en variable *x*, cuyo conjunto solución es: S = {1}

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución

Ejemplo

Las siguientes son ecuaciones equivalentes:

$5x - 4 = 0$ $\quad 5x = 4$ $\quad x = \frac{4}{5}$ $\quad 15x - 12 = 0$

En particular, la solución es más evidente en la ecuación: $x = \frac{4}{5}$

Resolución de Ecuaciones

Para hallar la solución de una ecuación, la transformamos en una ecuación equivalente operando miembro a miembro según las propiedades que poseen las operaciones en el conjunto de los números reales.

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de la ecuación: $5x+3=3.(x-3)$

Resolución

$5x+3=3x-9$ Por propiedad distributiva del producto respecto de la suma en $\mathbb{R}$

$5x+3+(-3)=3x-9+(-3)$ Sumamos miembro a miembro (–3), elemento opuesto de 3

$5x=3x\text{-}12$ Por propiedad asociativa de la suma en $\mathbb{R}$ y por elemento neutro de la suma en $\mathbb{R}$

$5x+(-3x)=3x-12+(-3x)$ Sumamos miembro a miembro $(-3x)$, elemento opuesto de $3x$

$2x=-12$ Por propiedad conmutativa, asociativa y de elemento neutro, de la suma en $\mathbb{R}$

$\frac{1}{2}2x=\frac{1}{2}(-12)$ Multiplicando miembro a miembro por el inverso multiplicativo de 2 y simplificando.

Resulta la ecuación equivalente: $x=-6$

Por lo tanto, se tiene que el conjunto solución de la ecuación es: S = {–6}

Ecuación Lineal es toda ecuación que sea equivalente a una ecuación de la forma:

$$a.x=b \ \wedge a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R}$$

Ejemplos

a) $12x+144=48$ es una ecuación lineal ya que una ecuación equivalente es: $x=-8$; donde: $a=1\wedge b=-8$.

b) $6x^2=24$ no es ecuación lineal ya que no se puede expresar de la forma: $ax=b$.

Importante: Sea una ecuación lineal: $ax=b$

- Si $a\neq 0$ entonces presenta una única solución y se clasifica como *ecuación compatible determinada.*
- Si $a=0$ y $b=0$ entonces la ecuación lineal presenta infinitas soluciones y se clasifica como *ecuación compatible indeterminada.*
- Si $a=0$ y $b\neq 0$ entonces la ecuación lineal no tiene solución y se clasifica como *ecuación incompatible.*

Se llama **ecuación cuadrática** a toda ecuación que mediante las operaciones elementales aplicables a ecuaciones, pueda expresarse de la forma: $a.x^2+b.x+c=0$ con $a\neq 0$

- $a.x^2$ se llama *término cuadrático*, y el valor real no nulo a se llama *coeficiente cuadrático.*
- $b.x$ se llama *término lineal*, y el valor real: b se llama *coeficiente lineal.*

- c se llama *término independiente*.

Nota: Sea la ecuación cuadrática: $a.x^2+b.x+c=0$ con $a\neq 0$. Si $b\neq 0$ y $c\neq 0$ se dice *completa*. En caso contrario, *incompleta*.

Ejemplos

a) $5x^2-\sqrt{3}x+1=0$ es una ecuación cuadrática completa, donde de acuerdo con la definición: $a=5 \wedge b=-\sqrt{3} \wedge c=1$

b) $2(x-1)^2-2=0$ es una ecuación cuadrática ya que se puede expresar, aplicando el cuadrado del binomio y propiedad distributiva del producto respecto de la suma en $\mathbb{R}$; como: $2x^2-4x=0$ donde: $a=2 \wedge b=-4 \wedge c=0$

Observación: Por ser $c=0$ es un caso de ecuación cuadrática incompleta.

c) $2(x-1)^2-2x^2=0$ no es una ecuación cuadrática ya que al aplicar el cuadrado del binomio y la propiedad distributiva, resulta: $-4x+2=0$ donde: $a=0$ y la definición no se cumple.

Para resolver una ecuación cuadrática existen distintos métodos algebraicos según sea completa o incompleta. No obstante, cualquiera sea el caso, siempre es posible aplicar la ***fórmula resolvente*** o ***fórmula de Bhaskara***.

<u>Fórmula de Bhaskara</u>: Sea la ecuación cuadrática: $a.x^2+b.x+c=0$ con: $a\neq 0$. Entonces, las soluciones de la ecuación, que se denominan: x_1 y x_2, se obtienen con la fórmula: $x_{1,2}=\frac{-b\ \pm\sqrt{\ b^2-4ac}}{2a}$

Ejemplo

Encontrar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $-2x^2+x+3=0$

Primero, observemos que: $a=-2 \wedge b=1 \wedge c=3$

Aplicando la *fórmula de Bhaskara* resulta:

$$x_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.(-2).3}}{2.(-2)}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{-4}=\frac{-1\pm 5}{-4}$$

Entonces: $x_1=\frac{-1+5}{-4}=-1 \quad \vee \quad x_2=\frac{-1-5}{-4}=\frac{3}{2}$

Luego, la ecuación tienen dos soluciones reales distintas y el conjunto solución es: $S=\left\{-1\,;\,\frac{3}{2}\right\}$

b) $2x^2+12x+18=0$

Primero reconocemos: $a=2 \wedge b=12 \wedge c=18$ y aplicamos la *fórmula de Bhaskara*:

$$x_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4.2.18}}{2.2}=\frac{-12\pm\sqrt{0}}{4}$$

Entonces: $x_1=x_2\frac{-12}{4}=-3$

Luego, la ecuación tienen dos soluciones reales iguales y el conjunto solución es: $S=\{\ -3\ \}$

c) $x^2+2x+2=0$

Primero reconocemos: $a=1 \wedge b=2 \wedge c=2$ y aplicamos la *fórmula de Bhaskara*:

$$x_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.2}}{2.1}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

Como $\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$, no existe valor real para x que s verifique la ecuación. Por lo tanto, el conjunto solución es: $S=\varnothing$

En la *fórmula de Bhaskara*, el radicando: b^2-4ac se denomina **discriminante de la ecuación cuadrática ($\boldsymbol{\Delta}$)**

Sea $\boldsymbol{\Delta}=\ b^2-4ac$ el discriminante de una ecuación cuadrática: $a.x^2+b.x+c=0$ con $a\neq 0$

Entonces:

- Si $\boldsymbol{\Delta}>0$ la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas
- Si $\boldsymbol{\Delta}=0$ la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales iguales
- Si $\boldsymbol{\Delta}<0$ la ecuación cuadrática no tiene solución en el conjunto de los números reales

Ecuaciones algebraicas irracionales

Se llama **ecuación algebraica irracional** a toda ecuación en la cual existe al menos un término en el cual la incógnita está afecta a una raíz enésima.

Ejemplos

a) $\sqrt{2x-3}+1=x$ b) $\sqrt{21+\sqrt{12+\sqrt{17-\sqrt{x}}}}=5$ c) $\sqrt{x+5}+\sqrt{3}=\sqrt{x+7}$

Para resolver una ecuación algebraica irracional el procedimiento algebraico a seguir para hallar el conjunto solución hay que decidirlo en cada caso, ya que el proceso varía de una ecuación a otra como se puede apreciar en los siguientes ejemplos:

Ejemplos

a) Determinar el conjunto solución de $\sqrt{x-2}=0$

Solución: Por definición de raíz enésima se sabe que $\sqrt[n]{a}=0\Leftrightarrow a=0$, entonces:

$$\sqrt{x-2}=0 \quad\Rightarrow\quad x-2=0 \quad\Rightarrow\quad x=2$$

Si se reemplaza x por 2, se verifica la igualdad: $\sqrt{2-2}=\sqrt{0}=0$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $S=\{\,2\,\}$

b) ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación: $x=\sqrt{x+5}+1$?

Solución: Se sabe que si el índice de la raíz es par, sólo se puede calcular la raíz enésima de números positivos o cero. Entonces, si la ecuación tiene solución en el conjunto de números reales, un primer requisito que debe cumplir es que x

debe ser un número real tal que: $x+5 \geq 0$ es decir: $x \geq -5$ o bien $x \in [-5; +\infty)$

Como se estableció el conjunto al que debe pertenecer la solución, ahora la intención es transformar la ecuación en otra equivalente, para ello:

Restamos 1 miembro a miembro y luego, elevamos al cuadrado en ambos miembros de la igualdad:

$$(x-1)^2 = \left(\sqrt{x+5}\right)^2$$

Operando en ambos miembros, resulta la ecuación: $x^2-2x+1=x+5$

Esta igualdad es una ecuación de segundo grado, por lo tanto igualamos a cero y aplicamos la fórmula de Bhaskara para encontrar sus soluciones, esto es:

$$x^2-2x+1-x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x-4=0$$

$$x_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 \ \vee \ x_2 = -1$$

Estos valores de x pertenecen al conjunto: $[-5;+\infty)$ por lo tanto **son posibles soluciones de la ecuación.** Pero, para que sean solución el segundo requisito que deben cumplir es que verifiquen la igualdad. Por lo tanto, analizamos si:

- ¿ $x_1 = 4$ verifica la ecuación? $4 = \sqrt{4+5}+1 \Rightarrow 4 = \sqrt{9}+1 \Rightarrow 4 = 3+1 \Rightarrow 4 = 4$

  Se tiene que $x_1 = 4$ verifica la igualdad por lo tanto **es solución de la ecuación**.

- ¿$x_2 = -1$ verifica la ecuación? $-1 \neq \sqrt{-1+5}+1 \Rightarrow -1 \neq \sqrt{4}+1 \Rightarrow -1 \neq 2+1 \Rightarrow -1 \neq 3$

  Se puede observar que $x_2 = -1$, si bien es solución de la ecuación cuadrática, no lo es de la ecuación irracional, esto sucede porque en algunas ocasiones cuando eliminamos los radicales, surgen soluciones llamadas *extrañas*. Por lo tanto diremos que $x_2 = -1$ **no es solución de la ecuación irracional**.

Entonces, el conjunto solución de la ecuación: $S = \{ 4 \}$

Ecuaciones Algebraicas Racionales

Toda ecuación que mediante operaciones pueda expresarse como una ecuación de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios y tal que $Q(x) \neq 0$ y $gr\left[Q(x)\right] \neq 0$, recibe el nombre de **Ecuación Algebraica Racional**.

En este tipo de ecuaciones algebraicas el procedimiento para hallar el conjunto solución no responde a un método único sino que depende de la ecuación que estemos resolviendo, tal como se observa en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

a) Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación: $\frac{2x-4}{3x-2} = 0$

Solución: $\frac{2x-4}{3x-2}=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2$ siempre que: $3x-2\neq 0$

Verificamos: $\frac{2.2-4}{3.2-2}=\frac{0}{-8}=0$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $S=\{2\}$

b) Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación: $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1}{x+1}$

Solución: Observando la ecuación, podemos afirmar que si existe solución su valor debe ser distinto de 1 y de –1

Luego, por propiedad de razones en $\mathbb{R}$: $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow (x+1)(x+1)=(x-1)(x-1)$

Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $x^2+2x+1=x^2-2x+1$

Y operando resulta: $4x=0 \Rightarrow x=0$

Verificamos: $\frac{0+1}{0-1}=\frac{0-1}{0+1} \Rightarrow -1=-1$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $S=\{0\}$

c) Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación: $\frac{5}{(x+1)^2}+\frac{4}{x+1}=1$ (I)

Solución: Determinamos el mínimo común múltiplo (m.c.m.) entre los denominadores. Recordemos que, para hallar el m.c.m. se descompone en factores y se eligen los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.
En este caso el m.c.m. es: $(x+1)^2$
Entonces, multiplicando en (I), en ambos miembros de la igualdad, por el m.c.m.:

$$(x+1)^2.\left(\frac{5}{(x+1)^2}+\frac{4}{x+1}\right)=(x+1)^2.1$$

Luego, aplicando propiedad distributiva del producto respecto de la suma en el 1° miembro y operando en el 2° miembro:

$$(x+1)^2.\frac{5}{(x+1)^2}+(x+1)^2.\frac{4}{x+1}=(x+1)^2$$

Simplificando en cada término del 1° miembro de la igualdad:

$5+4.(x+1)=(x+1)^2$

Operando, resulta:

$$5+4x+4=x^2+2x+1 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-8=0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-8)}}{2}=\frac{2\pm 6}{2} \quad \Rightarrow x_1=4 \ \vee \ x_2=-2$$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $S=\{4;-2\}$

Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones en las que aparecen una o más incógnitas

Una solución de una inecuación es un valor que cuando se lo sustituye por la variable en la misma, hace que la inecuación se verifique.

Operaciones que producen inecuaciones equivalentes

1. Si a < b entonces a + c < b + c. Si a > b entonces a + c > b + c
2. Si a < b y c > 0, entonces ac < bc. Si a > b y c > 0, entonces ac > bc
3. Si a < b y c < 0, entonces ac > bc. Si a > b y c < 0, entonces ac < bc.

Sistemas de ecuaciones

Se denomina ***Sistema de Ecuaciones Lineales*** (SEL) a un conjunto de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas, simbólicamente:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 + \cdots + a_{3n}.x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + \cdots + a_{mn}.x_n = b_m \end{cases}$$

En él, se llama: $\boldsymbol{a_{ij}}$ al coeficiente de la variable $\boldsymbol{x_j}$ en la ecuación $\boldsymbol{i}$, y $\boldsymbol{b_i}$ es el término independiente de la ecuación $\boldsymbol{i}$, donde $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, m}$ y $\boldsymbol{j = 1, 2, \dots, n}$

Solución de un sistema de ecuaciones lineales: Una *n-upla* $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ es *solución* de un SEL en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ si al asignar: $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,, \dots, x_n = s_n$ se verifican todas y cada una de las ecuaciones del sistema.
Resolver un SEL significa hallar el conjunto solución. El conjunto solución de una SEL nos dice si existe o no solución y si existe solución nos informará si ella es o no única.

Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL)

Según su tamaño: Si la cantidad de incógnitas es igual a la cantidad de ecuaciones el SEL se llama **cuadrado**. En caso contrario, **rectangular**.
Según sus términos independientes: Si todos los términos independientes del SEL son cero, el SEL se llama **homogéneo**. En caso contrario, **no homogéneo**.
Según el número de soluciones:
Compatible Determinado: Existe una única *n*-upla: $(\boldsymbol{s_1, s_2, \dots, s_n})$ de números reales que verifica todas y cada una de las ecuaciones del SEL.
Compatible Indeterminado: Existen infinitas *n*-uplas: $(\boldsymbol{s_1, s_2, \dots, s_n})$ de números reales que verifican todas y cada una de las ecuaciones del SEL.

Incompatible: No existe una *n*-upla: $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de números reales que verifica todas y cada una de las ecuaciones del SEL.

Resolución de un SEL

Dado un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL) puede obtenerse uno equivalente a través de operaciones entre las ecuaciones que se denominan Operaciones Elementales.
Las operaciones elementales son:

a) Intercambiar en el SEL las ecuaciones de lugar.
b) Reemplazar una ecuación por un múltiplo no nulo de ella.
c) Reemplazar una ecuación por sumarle o restarle otra ecuación del SEL.
d) Combinar las operaciones (b) y (c).

Existen varios métodos para resolver un SEL, entre ellos:

Método de sustitución:

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Método de igualación:

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones, con lo que se obtiene una ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Método de sumas y restas (o de reducción):

1. Se multiplican las dos ecuaciones por los números que convenga.
2. Se restan, y desaparece una de las incógnitas.
3. Se resuelve la ecuación resultante.
4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

FUNCIONES

Definición

En matemática, una **función (f)** es una relación entre un conjunto dado X (llamado dominio) y otro conjunto de elementos Y (llamado codominio) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento f(x) del codominio (los que forman la imagen).

Es decir, una magnitud o cantidad es **función** de otra si el valor de la primera (**variable dependiente,** generalmente llamada y) depende del valor de la segunda (**variable independiente**, generalmente llamada x)

Dominio e imagen

El **dominio** de una función es el conjunto de valores para los cuales la función está definida; es decir, son **todos los valores que puede tomar la variable independiente.**

Para determinar el dominio de una función, debemos considerar lo siguiente:

- Si la función tiene radicales de índice par, el dominio está conformado por todos los números reales para los cuales el radicando sea mayor o igual a cero.
- Si la función es un polinomio; una función de la forma $\mathbf{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}$ (donde $\mathbf{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n}$ son constantes y $\mathbf{n}$ un entero no negativo), el dominio está conformado por el conjunto de todos los números reales.
- Si la función es racional; esto es, si es el cociente de dos polinomios, el dominio está conformado por todos los números reales para los cuales el denominador sea diferente de cero.

La **imagen** es el conjunto formado por todos los valores que puede tomar la variable dependiente; estos valores están determinados además, por el dominio de la función.

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

Los **intervalos de crecimiento** son aquellos en los cuales la función crece, es decir, a mayores valores de la variable independiente, mayores valores de la variable dependiente.

Los **intervalos de decrecimiento** son aquellos en los cuales la función decrece, es decir, a mayores valores de la variable independiente, menores valores de la variable dependiente.

Máximos y mínimos

Los **máximos** y **mínimos** de una función son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos), que toma una función en un punto situado ya sea dentro de una región en particular de la curva (extremo local) o en el dominio de la función en su totalidad (extremo global o absoluto)

Raíces

Las **raíces de una función** y=f(x) son los valores x en los cuales f(x) se hace 0.

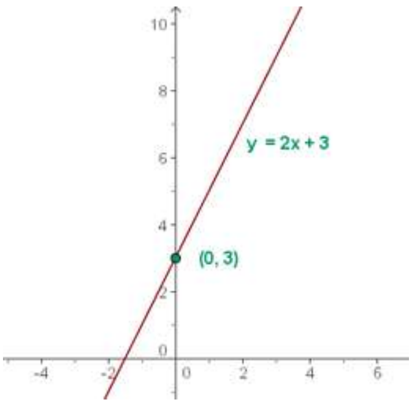
Función lineal

Una **función lineal** es aquella cuya expresión algebraica es del tipo $f(x) = mx+b$, siendo m un número cualquiera distinto de 0.

Características:

- Su dominio e imagen es el conjunto de los números reales.
- Su raíz se encuentra en el punto $\left(\frac{-b}{m};0\right)$
- Su gráfica es una línea recta que contiene al punto $(0,b)$.
- El número m se llama **pendiente**.
- La función es creciente si $m > 0$ y decreciente si $m < 0$.

Ejemplo: f(x)=2x+3



Su dominio es el conjunto de los números reales.
Su imagen es el conjunto de los números reales.
Es una función creciente ya que su pendiente es positiva.
Su ordenada al origen es el punto (0;3)
Su raíz es el punto $\left(-\frac{3}{2};0)\right)$

Función cuadrática

Una **función cuadrática** es aquella cuya expresión algebraica es del tipo
$f(x) = ax^2 + bx + c$ (forma polinómica),
o $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ (forma factoreada)
o $f(x)=a(x-x_v)^2+y_v$ (forma canónica),
con $\boldsymbol{a \neq 0}$ en todos los casos.

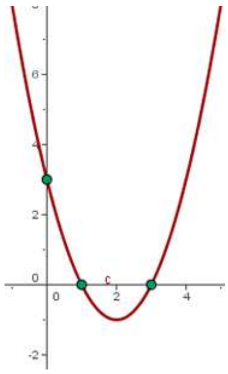
NOTA: No toda función cuadrática tiene una expresión algebraica de la forma factoreada, ya que a veces el discriminante es negativo por lo que no existe solución en $\mathbb{R}$.

Características:

- Su gráfica es una parábola. Será cóncava hacia arriba si $a>0$ o cóncava hacia abajo si $a<0$.
- Su dominio es el conjunto de los números reales.

- Para hallar las raíces se utiliza la fórmula de Bhaskara y, según resulte el discriminante puede tener una raíz real (doble), dos raíces reales distintas o ninguna raíz real.
- Posee un eje de simetría el cual es la recta $x=x_v$

Ejemplo: $f(x)= x^2 - 4x + 3$
Esta función está expresada en forma polinómica siendo a=1, b=-4 y c=3.



Es cóncava hacia arriba (su coeficiente principal es positivo)
Sus raíces son los puntos (1,0) y (3,0).
Su vértice es el punto (2, -1) por lo que su eje de simetría es la recta x=2.
Su dominio es el conjunto de los números reales y su imagen el intervalo semicerrado [-1; +∞)
Crece en el intervalo abierto (2; +∞) y decrece en (-∞;2)

GEOMETRÍA DEL PLANO

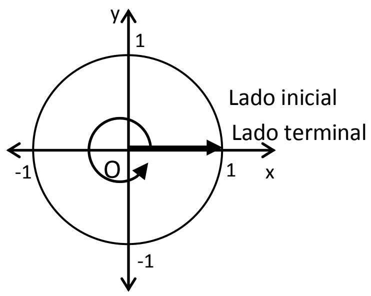
ÁNGULOS

Sistemas de medición

Sistema sexagesimal - Grados, Minutos y segundos

La historia de la trigonometría comienza con los Babilonios y los Egipcios. Estos últimos establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Este sistema de medición de ángulos se conoce como ***SISTEMA SEXAGESIMAL***

Definición: El ángulo formado al girar el lado inicial exactamente una vez en dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj hasta que coincide consigo mismo (una vuelta o un giro) se dice que mide 360º.



Recordemos que:

$$1° = \frac{1}{360}\ de\ un\ giro$$

$$1' = \frac{1}{60} de\ un\ grado$$

$$1'' = \frac{1}{60} de\ un\ minuto$$

Ejemplos

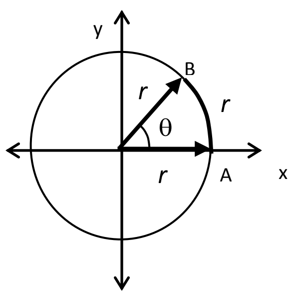
- 25° 30' equivale a 25,5° y 80,59° equivale a 80°35'24''
- Un ángulo θ es agudo si $0 < \theta < 90°$ y un ángulo φ es obtuso si $90° < \varphi < 180°$
- Un ángulo es llano si mide $180°$

El sistema sexagesimal es el sistema de medición de ángulos más usual en la vida cotidiana, en él la medida del ángulo no es un número real.
Existe otro sistema de medición llamado ***CIRCULAR***, en el cual la medida de los ángulos son números reales.

Sistema Circular – Radianes

Un ***ángulo central*** es un ángulo cuyo vértice está en el centro de una circunferencia. Los lados inicial y terminal de un ángulo central definen un arco sobre la circunferencia.

Si el radio de la circunferencia es r y la medida de la longitud del arco subtendido por el ángulo central también es r, entonces la medida del ángulo central es **1 radián**.
En la figura, la longitud del arco $\widehat{AB}$ es igual a la medida del radio r de la circunferencia.
Por lo tanto, $\theta = 1$ radián



Ejemplos

- Sea una circunferencia de radio r, la medida del ángulo central correspondiente a un giro es: 2π
- Si en el sistema circular un ángulo de un giro mide 2π entonces un ángulo llamo mide π y un ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$

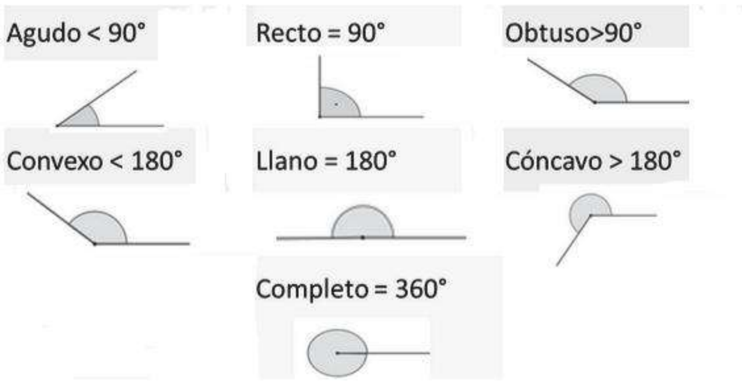
Equivalencia entre el sistema sexagesimal y los radianes

- Un ángulo de un giro medido en radianes mide 2π radianes
- Un ángulo de un giro medido en el sistema sexagesimal mide 360º

Un ángulo de 2π radianes equivale a un ángulo de 360º

Entonces: $\frac{2\pi\ radianes}{360°} = \frac{m\ radianes}{n°}$

Clasificación de ángulos

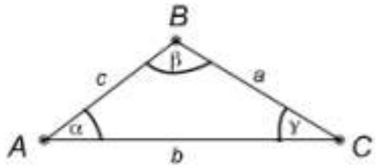


Ángulos consecutivos: Dos ángulos consecutivos si tienen el vértice y uno de sus lados en común.
Ángulos complementarios: Dos ángulos son complementarios cuando su suma es igual a 90°.
Ángulos suplementarios: Dos ángulos son suplementarios cuando su suma es igual a 180°.
Ángulos adyacentes: Dos ángulos son adyacentes cuando son suplementarios y consecutivos.

TRIÁNGULOS

Un **triángulo** es un polígono de tres segmentos que determinan tres puntos del plano y su limitación.

Un triángulo tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices entre otros elementos. La suma de sus ángulos interiores es igual a 180°.



Otros elementos del triángulo:

ALTURA. La altura correspondiente a un lado es el segmento perpendicular a dicho lado que pasa por el vértice opuesto.

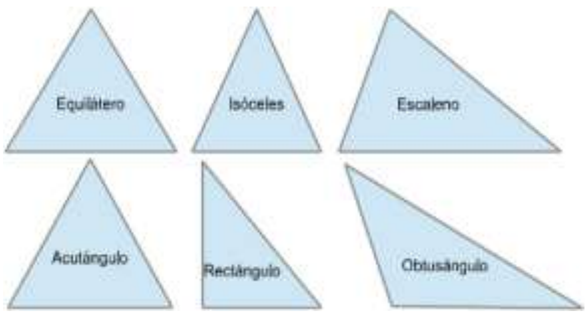
MEDIANA. La mediana correspondiente a un lado es el segmento cuyos extremos son el punto medio del lado y el vértice opuesto.

MEDIATRIZ. La mediatriz de un lado es la recta perpendicular a dicho lado que pasa por su punto medio.

BISECTRIZ. La bisectriz de un ángulo es la semirrecta con origen en su vértice cuyos puntos equidistan de los lados del ángulo. Quedan determinados dos ángulos congruentes cuya amplitud equivale a la mitad del ángulo inicial.

Clasificación de los triángulos

Equilátero: Si la longitud de sus tres lados a, b y c es la misma.
Isósceles: Si al menos dos de sus lados son iguales
Escaleno: Si sus tres lados son distintos.



Acutángulo: Si todos sus ángulos son agudos.
Rectángulo: Si uno de sus ángulos es recto.
Obtusángulo: Si alguno de sus ángulos es superior a 90°.

Congruencia de Triángulos

Para establecer si dos triángulos son congruentes hay cuatro criterios fundamentales:

Lado-Ángulo-Lado: Dos triángulos son congruentes si dos de sus lados tienen la misma longitud de sus homólogos, y el ángulo comprendido entre ellos tiene la misma medida de su homólogo.

Ángulo-Lado-Ángulo: Si dos ángulos y el lado entre ellos son respectivamente congruentes con los mismos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Lado-Lado-Lado: Si en dos triángulos los tres lados de uno son respectivamente congruentes con los del otro, entonces los triángulos son congruentes.

Lado-Lado-Ángulo: Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

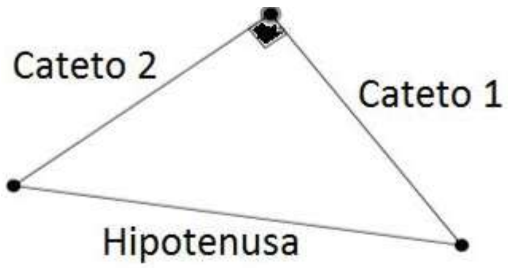
Semejanza de Triángulos

Para establecer si dos triángulos son semejantes hay cuatro criterios fundamentales:

- Lado-Ángulo-Lado: Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados homólogos son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es congruente.
- Ángulo-Ángulo: Si tienen dos ángulos homólogos congruentes entonces ambos triángulos son semejantes.
- Lado-Lado-Lado: Si los tres pares de lados homólogos son proporcionales.
- Lado-Lado-Ángulo: Si tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo opuesto al mayor de ellos es congruente.

Triángulos rectángulos

Los lados de un triángulo rectángulo también se denominan: Hipotenusa, Cateto Mayor y Cateto menor.



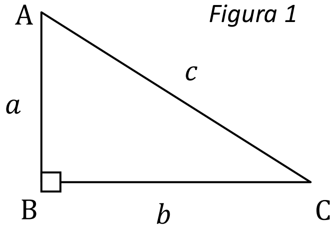
HIPOTENUSA: Se denomina así al lado opuesto al ángulo recto, que será siempre el lado de mayor longitud.

CATETOS: Los lados que no son Hipotenusa, se denominan Catetos. Dependiendo de su longitud se diferencian como Mayor y Menor.

<u>TEOREMA DE PITÁGORAS</u>: El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Figura 1



Ejemplo

Si en el triángulo de la *figura 1* sucede que: $\overline{AC} = 13\ cm$ y $\overline{BC} = 12\ cm$. Hallar la medida del lado $\overline{AB}$

Solución: Por el Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$ donde $c = \overline{AC} = 13$ y $b = \overline{AC} = 12$

Entonces: $13^2 = a^2 + 12^2$ Resolviendo la ecuación cuadrática: $a^2 = 169 - 144 \to a^2 = 25 \to |a| = 5 \to a = 5\ o\ a = -5$

Luego, la longitud del lado $\overline{AB}$ es 5 cm

Recíproco del teorema de Pitágoras: Si a, b y c son las longitudes de los tres lados de un triángulo, con c como la longitud del lado más largo y si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo con el ángulo recto opuesto al lado de longitud c.

Ejemplo

Si las longitudes de los lados de un triángulo son $\sqrt{2}\ cm$, $\sqrt{3}\ cm$ y $\sqrt{5}\ cm$. ¿Es un triángulo rectángulo?

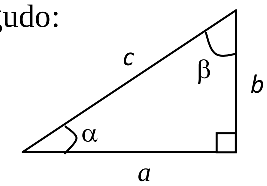
Solución: Como $\sqrt{5}$ es la mayor de las medidas, designamos: $c = \sqrt{5}$. Entonces, planteamos: $\sqrt{5}^2 \overset{?}{=} \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2$

Operando, se cumple que: $5 = 5$

Por lo tanto, el triángulo es rectángulo.

Razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo

Considerando al triángulo rectángulo de la figura, recordemos cómo se definen las razones seno, coseno y tangente de un ángulo agudo:



Definición: Llamamos **seno del ángulo α** a la razón entre la longitud del cateto opuesto del ángulo α y la longitud de la hipotenusa:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{long. cateto opuesto de }\alpha}{\text{long. hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

Definición: Llamamos **coseno del ángulo α** a la razón entre la longitud del cateto adyacente del ángulo α y la hipotenusa:

$$\cos\alpha = \frac{\text{long. cateto adyacente de }\alpha}{\text{long. hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

Definición: Llamamos **tangente del ángulo α** a la razón entre la longitud del cateto opuesto del ángulo α y longitud del cateto adyacente del ángulo α:

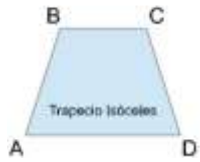
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{long. cateto opuesto de }\alpha}{\text{long. cateto adyacente de }\alpha} = \frac{b}{a}$$

***Nota:** Las razones entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo que denominamos razones trigonométricas surgen del concepto de triángulos semejantes.*

Las relaciones trigonométricas enunciadas permiten resolver variados ***problemas*** que al interpretarlos gráficamente la o las incógnitas están relacionadas con los lados o los ángulos de un triángulo rectángulo.

CUADRILÁTEROS

Dados cuatro puntos A, B, C y D no alineados de a tres, se define al cuadrilátero ABCD como el polígono convexo cuyos vértices son esos cuatro puntos y sus lados son los segmentos AB, BC, CD y DA respectivamente.

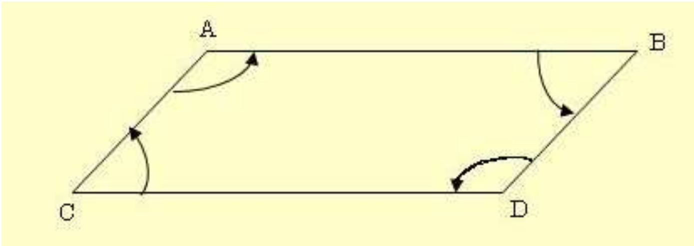


Propiedades de los cuadriláteros

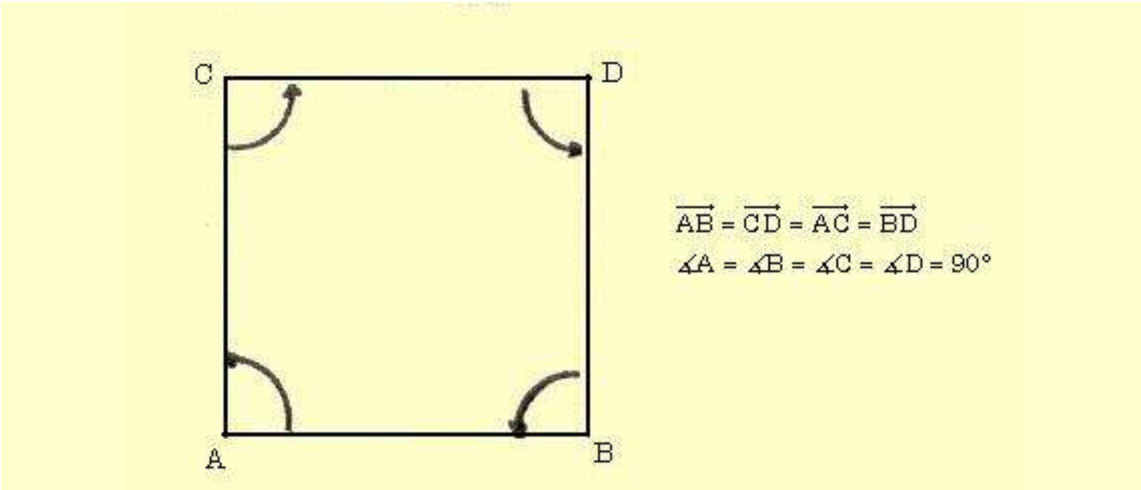
Los "LADOS OPUESTOS" son iguales y que no tienen ningún vértice en común.
Los "LADOS CONSECUTIVOS" son los que tienen un vértice en común.
Los "VÉRTICES Y ÁNGULOS OPUESTOS" son los que no pertenecen a un mismo lado, siendo los ángulos iguales.
La "SUMA DE ÁNGULOS INTERIORES" es igual a cuatro rectos (360°). Los "ÁNGULOS ADYACENTES" a un mismo lado son suplementarios, es decir, suman 180°.
Las "DIAGONALES" se cortan en su punto medio.
El "NÚMERO TOTAL DE DIAGONALES" que pueden trazarse siempre son dos y que se cortan en un punto interior.
Desde un vértice solo puede trazarse una "DIAGONAL".

Clasificación de cuadriláteros

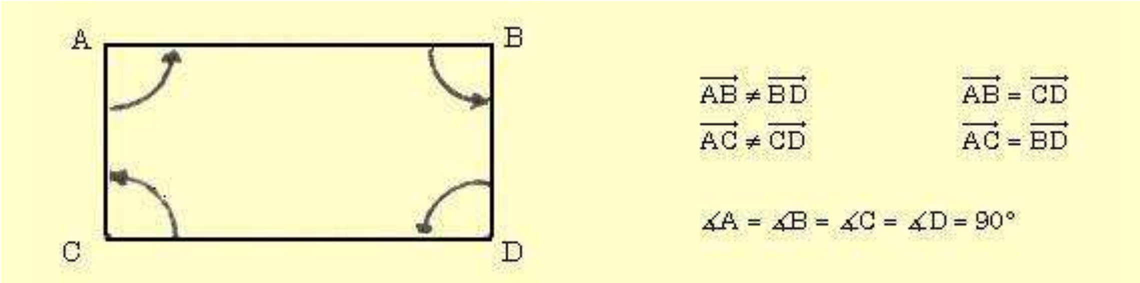
Si los lados opuestos son paralelos entre sí, se les denomina "PARALELOGRAMOS".



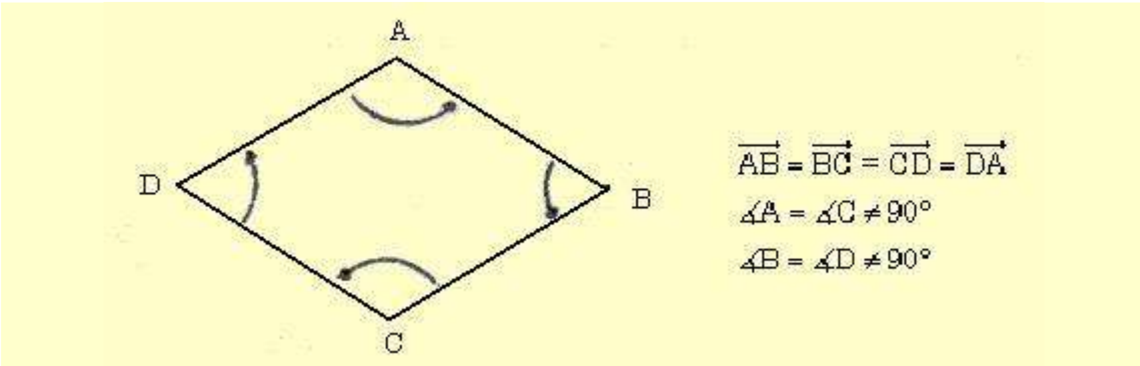
CUADRADOS: Es un polígono regular que tiene sus ángulos y lados iguales.



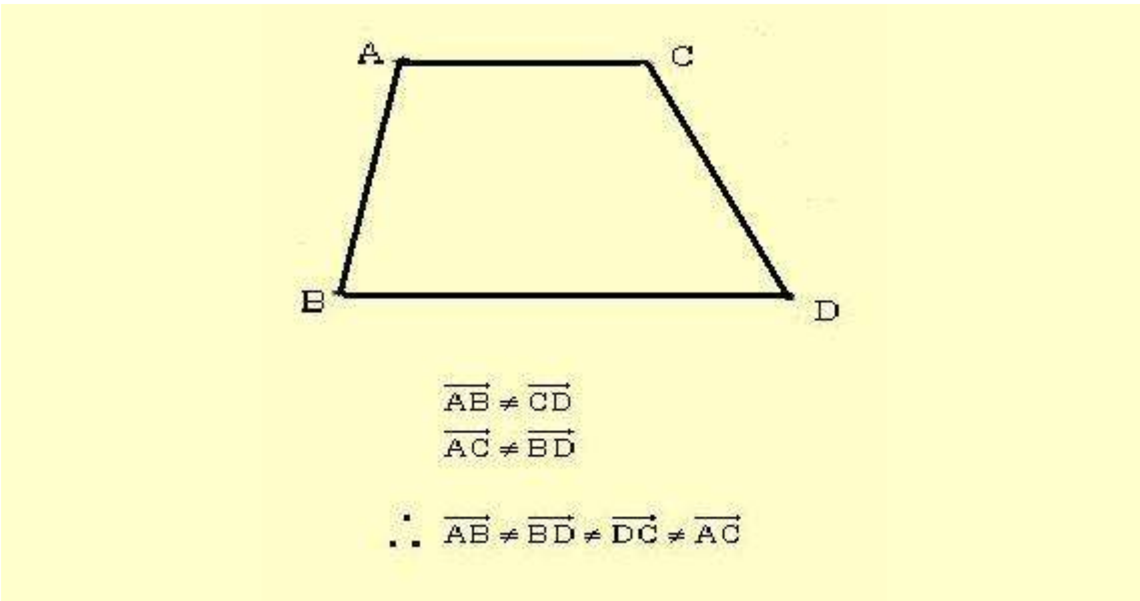
RECTÁNGULOS: Es un paralelogramo que tiene sus lados contiguos desiguales, es decir, solamente sus lados opuestos son iguales; sus cuatro ángulos son rectos.



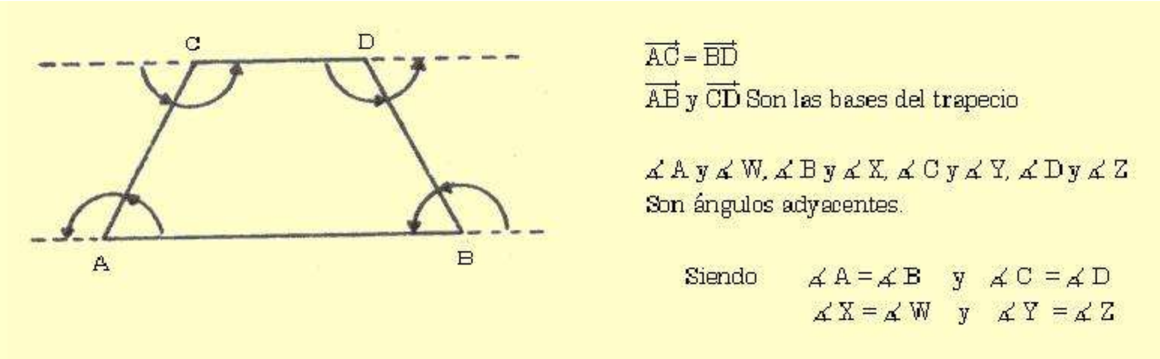
ROMBOS: Paralelogramos que tienen sus lados iguales y sus ángulos son oblicuos, es decir, sus ángulos no son rectos.



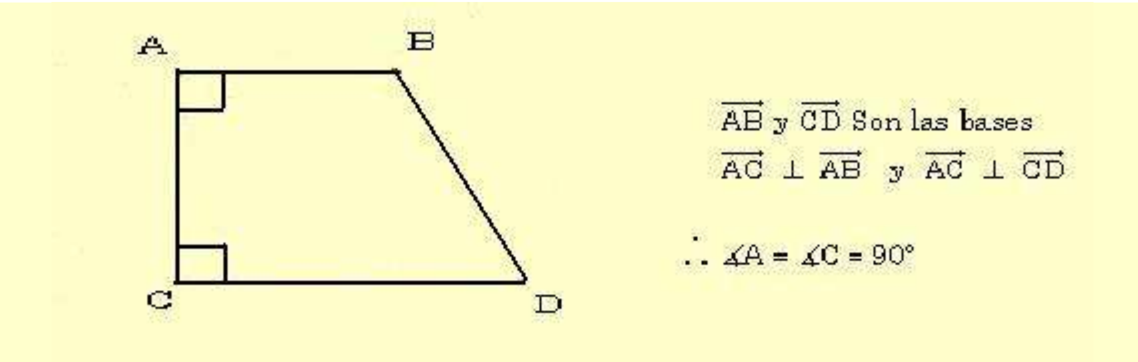
Si únicamente dos de sus lados opuestos son paralelos, es decir, los que se llaman "Bases" y los otros dos no, se denominan "TRAPECIOS"
TRAPECIO ESCALENO: Es aquel que tiene los lados no paralelos desiguales.



TRAPECIO ISOSCELES: Es aquel que tiene los lados no paralelos de igual longitud, formando con las bases ángulos adyacentes iguales.

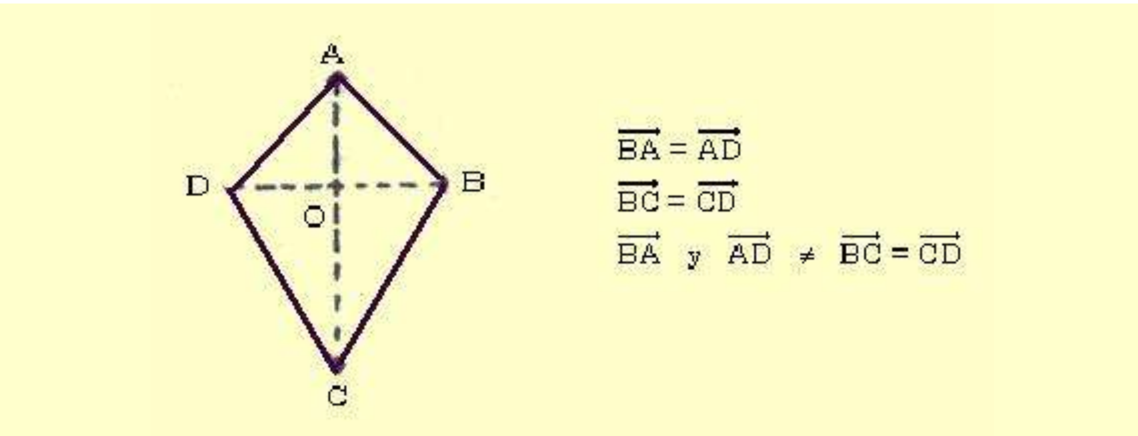


TRAPECIO RECTÁNGULO: Es aquel que tiene un lado perpendicular a las bases, formando un ángulo recto con cada base.

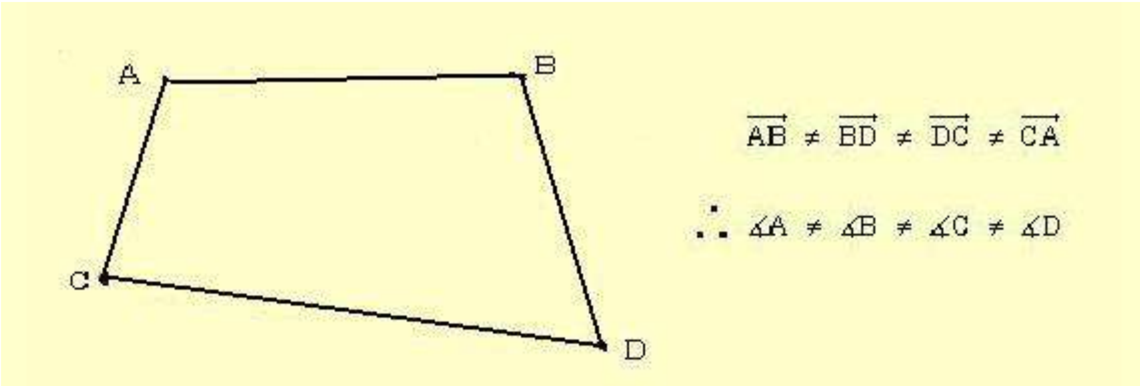


Los cuadriláteros cuyos lados opuestos no son paralelos entre sí, se denominan "TRAPEZOIDES".

TRAPEZOIDES SIMÉTRICOS: Son los que tienen dos pares de lados consecutivos iguales pero el primer par de lados consecutivos iguales es diferente del segundo.



TRAPEZOIDES ASIMÉTRICOS: Son aquellos que no ofrecen ninguna de las características de un trapezoide simétrico.



POLÍGONOS EN GENERAL

Un **polígono** es una figura plana compuesta por una secuencia finita de **segmentos rectos** consecutivos que encierran una región en el plano. Estos segmentos son llamados **lados** y los puntos en que se intersecan se llaman **vértices**.

Clasificación de polígonos

Complejo: Algún par de lados se interseca en más de un punto. (Tiene lados que se cruzan)

Simple: Cada par de lados se interseca sólo en un punto (vértice).

Cuando el polígono es simple, puede ser:

Cóncavo: Contiene por lo menos un ángulo cóncavo.

Convexo: Todos sus ángulos son convexos.

Un polígono convexo puede ser:

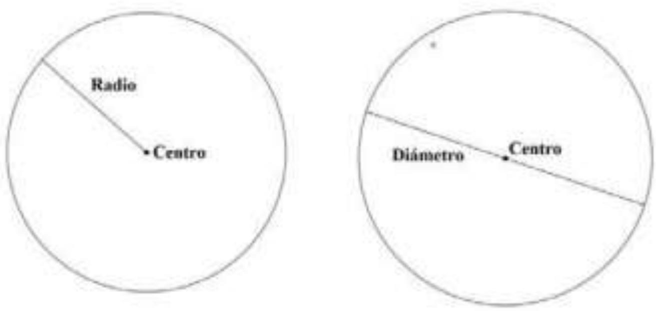
Regular: Todos sus lados son iguales.

Irregular: No es regular.

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

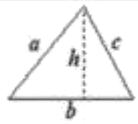
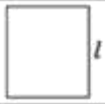
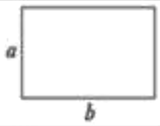
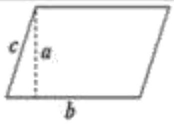
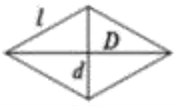
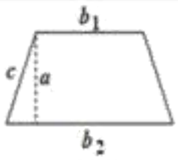
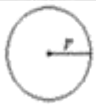
Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a distancia fija de un centro.

Esa distancia se llama radio y la máxima distancia entre dos puntos de la circunferencia (que pasa por el centro) se llama diámetro.



Perímetro y área de figuras planas

El **perímetro** es la suma de las longitudes de los lados de una figura. El perímetro de un círculo se llama **longitud de la circunferencia.**
El **área** de una figura plana es la medida de la superficie o región encerrada por dicha figura.

Figura		Área	
Triángulo:		$A = \frac{b \cdot h}{2}$	
Cuadrado:		$A = l^2$	
Rectángulo:		$A = a \cdot b$	
Paralelogramo:		$A = a \cdot b$	
Rombo:		$A = \frac{D \cdot d}{2}$	
Trapecio Isósceles:		$A = \frac{a \cdot (b_1 + b_2)}{2}$	
Circunferencia Círculo		Área del Círculo $A = \pi \cdot r^2$	Longitud de la circunferencia $l = 2 \cdot \pi \cdot r$

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Cuerpos

Se denomina **cuerpo** a aquellos elementos que ocupan un lugar en el espacio (ya sea real o ideal) y determinan un espacio que encierran.

POLIEDROS. Son aquellos cuerpos compuestos exclusivamente por figuras geométricas planas.

ELEMENTOS:
CARA. Es cada uno de los polígonos que lo limitan.
ARISTA. Es el segmento intersección de dos caras.
VÉRTICE. Es el punto intersección de dos o más aristas.

CUERPOS REDONDOS. Son aquellos que están compuestos total o parcialmente por figuras geométricas curvas. Como la esfera, el cilindro o el cono.

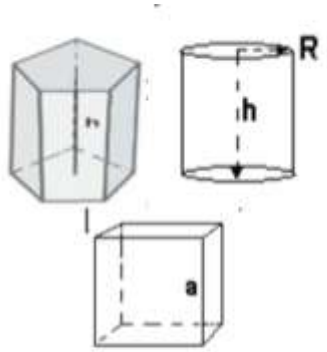
PRISMA. Los prismas son **poliedros** que poseen dos caras paralelas, llamadas **bases**. Las otras caras se denominan “caras laterales”.
REGULAR. Aquel cuyas bases son polígonos regulares.
IRREGULAR. Aquel cuyas bases son polígonos irregulares.
RECTO. Cuando las caras laterales son perpendiculares a la base.
OBLICUO. Cuando las caras laterales no son perpendiculares a la base.
PARALELEPÍPEDO. Es un prisma de 6 caras, todas ellas paralelogramos.

PIRÁMIDE. Las pirámides son **poliedros** que poseen una cara llamada **base** y el resto de sus caras están formadas por triángulos que se unen en un punto o **vértice común** (caras laterales)
REGULAR. Su base es un polígono regular.
IRREGULAR. Su base es un polígono irregular.
RECTA. Las caras laterales son triángulos isósceles.
OBLICUA. Alguna de las caras laterales no es un triángulo isósceles.

Volúmenes y áreas de cuerpos

El **área** de un cuerpo refiere al área de los polígonos o figuras curvas que forman sus caras.
El **volumen** de un cuerpo es la región espacial encerrada por el mismo.

Prismas y cilindros



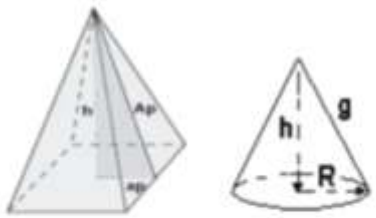
A=2. Área de la base + área lateral
V=Superficie de la base . Altura

Esfera

$$\boldsymbol{A = 4.\pi.r^2}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}.\pi.r^3}$$

Pirámides y conos



A= Área de la base + área lateral

$$V = \frac{área\ de\ la\ base\ .altura}{3}$$