CURSO DE INICIACIÓN

INSTITUTO SUPERIOR DEL PROFESORADO DR. JOAQUÍN V. GONZÁLEZ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – AÑO 2018

PRIMERA ETAPA, A DISTANCIA

Material de estudio para ser trabajado en forma autónoma por el estudiante, como parte de su preparación previa al inicio de las carreras del Profesorado de Educación Media en Matemática y/o del Profesorado de Educación Superior en Matemática

Autores:

Carnelli, Gustavo
Chávez, Carolina
Pesce, Carlos

EL CURSO DE INICIACIÓN Y LA ASIGNATURA *ELEMENTOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA*

El Departamento de Matemática del JVG le ofrece al estudiante ingresante la posibilidad de trabajar sobre contenidos matemáticos básicos que son necesarios para las asignaturas del campo de la Matemática del primer año.

La primera etapa del Curso de Iniciación consiste en un trabajo autónomo del estudiante, a partir del presente material. A lo largo de las actividades propuestas se espera que el estudiante utilice calculadora científica, cuando lo considere conveniente o necesario. En las semanas del 26/02 y del 05/03 se propondrán encuentros opcionales para consultas sobre las actividades propuestas.

La segunda etapa del Curso de Iniciación tiene carácter presencial y se realiza en las dos semanas previas al inicio de clases de primer año (semanas del 12 y del 19/03). También tiene carácter opcional, pero el estudiante que asista a un mínimo del 50 % de estas clases y rinda la evaluación que se toma en la última clase, puede optar por rendir libre la asignatura Elementos Básicos de Matemática.

El dictado de la segunda etapa se apoya en el trabajo autónomo de la primera etapa. La evaluación incluye lo trabajado en ambas etapas.

EJE TEMÁTICO 1: NÚMEROS

Números naturales, enteros, racionales y reales

En esta primera etapa, estudiamos el tema divisibilidad en naturales y luego presentamos a cada uno de los conjuntos numéricos.

Realizar la siguiente actividad

Actividad 1

Dado el número natural que puede escribirse como

$$2^3.3.5^4.11^2.17$$

decir si vale que es múltiplo de …

a) 4 b) 15 c) 16 d) 34 e) 110 f) 13

(nota: se espera que pueda responderse sin realizar la multiplicación de los factores que componen al número)

Para leer luego haber resuelto la Actividad 1

Lectura 1: Divisibilidad en números naturales

Vamos a discutir sobre algo seguramente muy conocido: la noción de *múltiplo*.

Trabajaremos con esta noción en el conjunto de los números naturales, que son los usados para contar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, … En la asignatura Álgebra I se extenderá el trabajo con esta noción a un conjunto más amplio: el de los enteros.

El primer encuentro que tuvimos con los múltiplos son las conocidas "tablas". Por ejemplo, la tabla del 3, que comienza así: 3.1 = 3, 3.2 = 6, 3.3 = 9, 3.4 = 12, 3.5 = 15, etc. Los resultados de la tabla son los múltiplos de 3.

¿Cómo podemos caracterizar a los múltiplos de 3? De otro modo, ¿cuándo un número natural va estar en la tabla del 3?

Un número natural va a estar en la tabla del 3 cuando sea el resultado de multiplicar a 3 por algún número natural. Así, 297 está en la tabla del 3 porque 3.99 = 297; 100 no está en la tabla del 3 porque no hay ningún número natural *x* que cumpla que 3.*x* = 100.

Entonces, podemos decir que un número natural *t* es ***múltiplo*** de 3 si hay un número natural *p* que cumple que: $t = 3.p$

¿Cuándo un número natural t es múltiplo de 4? De modo análogo a lo anterior, cuando exista un número natural p tal que: $t = 4.p$

Por ejemplo, si *p = 11* obtenemos al número 44 que es un múltiplo de 4; si *p = 102* obtenemos 408 que es un múltiplo de 4. Para cada valor natural de *p* obtenemos un múltiplo de 4 y cada múltiplo de 4 es el resultado del producto de 4 por un natural. Así, si pensamos en el número 68, el valor de *p* es 17, porque 68= 4. 17.

De este modo, podemos caracterizar a los múltiplos de cualquier número natural.

Asociada a la noción de múltiplo, está la noción de divisor. Cuando decimos que *t* es múltiplo de *p*, también podemos decir que *p* es ***divisor*** de *t*.

Consideremos el número *a* que se expresa como $a = 3^2.5.13^3$

Nos preguntamos si *a* es múltiplo de 5.

Sabemos que un número es múltiplo de 5 cuando puede escribirse como producto de 5 por un natural. Entonces, a es múltiplo de 5 porque $a = 3^2.5.13^3 = 5.(3^2.13^3)$ y el número $3^2.13^3$ es un natural porque al multiplicar números naturales se obtiene otro número natural.

Nos preguntamos ahora si *a* es múltiplo de 3.

Sí, lo es, porque $a = 3^2.5.13^3 = 3.(3.5.13^3)$ y $3.5.13^3$ es un natural porque al multiplicar números naturales se obtiene otro número natural.

¿Es *a* múltiplo de 45?

Sí, por que $a = 3^2.5.13^3 = 9.5.(13^3) = 45.(13^3)$ y 13^3 es un natural porque al multiplicar números naturales se obtiene otro número natural.

¿Es *a* múltiplo de 2?

No, porque no es posible escribir al número como el producto 2 de por un natural.

Detengámonos en esto un poco más. ¿Por qué podemos afirmar lo anterior? La expresión del número *a* como un producto de potencias de distintos números, tiene una particularidad importante: los factores que intervienen son números primos. Recordemos que un número natural es primo cuando tiene exactamente dos divisores. Por ejemplo, 7 es primo porque sus únicos divisores son 1 y 7; no hay otro número natural que pueda dividirlo obteniendo un cociente entero y resto 0; otros números primos son el 3, 5, 11, 13, 17.

Hay una propiedad que dice que todo número natural mayor que 1 puede escribirse como producto de factores primos y, además, que esto puede hacerse de manera única (es el Teorema Fundamental de la

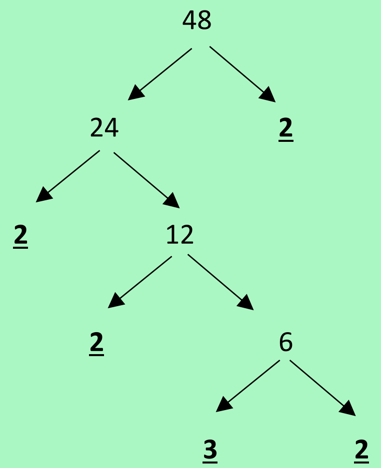
Aritmética y se desarrolla en Álgebra I). Cuando un número está escrito de ese modo, decimos que está *factorizado*.

El número *a* está expresado en forma factorizada y, como entre los factores no aparece el 2 (que también es primo), podemos afirmar que *a* no es múltiplo de 2 sin realizar cálculos. Como otro ejemplo, podemos dar la descomposición en factores primos de 48. Para ello, podemos usar descomposiciones parciales del número hasta llegar a la expresión factorizada:

$48 = 4.12 = 4.4.3 = 2^2.2^2.3 = 2^4.3$

O también, usar alguno de los siguientes procedimientos clásicos: el de la izquierda, que consiste en dividir sucesivamente por primos que sean divisores del número, o el de la derecha, en el que se descompone al número como producto de dos números, y repitiendo el proceso con los factores que no son primos.

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	



Luego, $48 = 2^4.3$

Realizar las siguientes actividades luego de haber realizado la Lectura 1

Actividad 2

Revisar la resolución propuesta para la Actividad 1

Actividad 3

Resolver los siguientes ejercicios:

1) Dado el número $a = 3^4.7.11^3$, dar 10 números naturales que sean divisores de *a*.

2) En la expresión $2^a.3^b.7^c$, indicar valores posibles de *a*, *b* y *c* para que se cumpla que la expresión dada corresponda a un número natural que …

a) es múltiplo de 4

b) es múltiplo de 6

c) es múltiplo de 42

d) no es múltiplo de 2

3) ¿Por qué el 1 es divisor de cualquier número natural?

4) Dar 10 números primos y justificar por qué lo son

5) Dados los números 120 y 36

a) listar a todos los divisores de cada uno

b) ¿cuáles son los divisores comunes de ambos números?

c) ¿cuál es el divisor común mayor de ambos números?

d) escribir a cada número como producto de sus factores primos

e) ¿cómo se puede obtener el divisor común mayor de ambos números usando la descomposición de los números propuesta en d)?

Para leer luego haber resuelto las Actividades 2 y 3

Lectura 2: Criterios de divisibilidad

A continuación, recordamos los criterios de divisibilidad de varios números:

Divisibilidad por 2: Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par

Ejemplos: 128 es múltiplo de 2 ya que termina en 8, cifra par; 6509 no lo es ya que termina en 9, que no es una cifra par.

Es un criterio corto y eficiente ya que permite decidir rápidamente si el número es o no múltiplo de 2.

Divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3

Ejemplo: 4581 es múltiplo de 3 porque 4+5+8+1 = 18, que es múltiplo de 3

También puede decirse que es un criterio corto y eficiente.

Divisibilidad por 4: Un número es divisible por 4 cuando sus últimas 2 cifras forman un número múltiplo de 4

Ejemplo: 5578 no es múltiplo de 4 porque 78 no es múltiplo de 4 (80 y 76 sí lo son).

También puede decirse que es un criterio corto y eficiente.

Divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5 cuando termina en una cifra que es múltiplo de 5

Ejemplo: 88100 es múltiplo de 5 porque termina en 0 que es múltiplo de 5.

Es un criterio tan corto y eficiente como el de 2.

Divisibilidad por 6: Un número es divisible por 6 cuando es divisible por 2 y por 3

Ejemplo: 554 no es divisible por 6 ya que no es múltiplo de 3 (5+5+4=14, que no es múltiplo de 3)

Puede decirse que es un criterio corto y eficiente.

Divisibilidad por 7: Un número es divisible por 7 cuando el número que resulta de quitarle al número inicial la cifra de las unidades y restarle el duplo de esa cifra, es un múltiplo de 7

Ejemplo: veamos si 1645 es múltiplo de 7. Se considera el número 164 y se le resta 2.5 = 10. Resulta

164 – 10 = 154. Si no es evidente si el número es o no múltiplo de 7, podemos volver a aplicar el criterio. Así: 15 – 2.4 = 7, que es múltiplo de 7.

El criterio puede no ser corto si requiere de varios pasos.

Divisibilidad por 8: Un número es divisible por 8 cuando sus últimas 3 cifras forman un número múltiplo de 8

Ejemplo: 1520 es divisible por 8 ya que 520 lo es (520 : 8 = 65)

El criterio es no es muy eficiente ya que reconocer si un número de 3 cifras es múltiplo de 8 no suele ser simple.

Divisibilidad por 9: Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9

Ejemplo: 4581 es múltiplo de 9 porque 4+5+8+1 = 18, que es múltiplo de 9

Es un criterio corto y eficiente, del mismo modo que el de 3.

Divisibilidad por 11: Un número es divisible por 11 cuando el número que resulta de la resta entre la suma de las cifras ubicadas en posición impar y la suma de las cifras ubicadas en posición par, es un múltiplo de 11.

Ejemplo: veamos si 23741 es múltiplo de 11. La suma de las cifras ubicadas en lugares impares es 1+7+2=10 y la suma de las cifras ubicadas en lugares pares es 4+3=7. La diferencia es 10 – 7 = 3, que no es múltiplo de 11, por lo que 23741 tampoco lo es.

El criterio suele ser corto y es eficiente.

Lectura 3: Un criterio para decidir si un número es primo

No siempre es fácil decidir si un número natural es primo. Por ejemplo: 721, ¿es primo?

Vemos que no es múltiplo de 2, tampoco de 3, ni de 4, ni de 5, … pero ¿con cuántos más probar? No parece un buen método seguir así …

En primer lugar, es conveniente seguir el orden natural de los números. Ver si es múltiplo de 2, si no lo es, ver si es de 3, si no lo es, ver si es de 4, pero ¿es necesario ver si es múltiplo de 4? No, porque si fuera múltiplo de 4, hubiéramos detectado previamente que es múltiplo de 2. Sí, resulta necesario ver si es múltiplo de 4, pero no es necesario ver si es múltiplo de 6 porque hubiéramos encontrado antes que es múltiplo de 2 y de 3. No es necesario probar con los que no son primos.

Si bien hemos economizado trabajo con lo anterior, igual el trabajo puede ser arduo. Veamos un resultado teórico que nos ayudará aún más en la tarea de decidir si un número es primo. Para eso, hay que ver la siguiente deducción:

Consideremos un número natural *a* que no es primo. Entonces, tiene otros divisores además de 1 y de *a*, por lo que puede escribirse como producto de dos números naturales que son menores que *a*:

$$a = m.n \text{ (}m \text{ y } n \text{ son dos de los divisores de } a\text{).}$$

- Si los números *m* y *n* son iguales, entonces podemos escribir: $a = m^2$. Por lo tanto, $m = \sqrt{a}$.

Como *m* es uno de los divisores de *a,* hemos llegado a que *a* tiene un divisor igual a su raíz cuadrada.

- Si los números *m* y *n* son distintos, podemos considerar que *m* < *n* (alguno de los dos es menor que el otro); luego, *0* < *m* < *n* < *a*.

Tomemos la desigualdad del medio, *m* < *n*. Si multiplicamos miembro a miembro por *m,* resulta que

$m^2 < n.m$, pero sabemos que $n.m = a$, por lo que $m^2 = a$, de lo que se deduce que $m < \sqrt{a}$. Asi, *a* tiene un divisor menor que su raíz cuadrada.
Sintetizando los dos casos analizados, podemos decir que el número *a* (que no es primo) tiene un divisor menor o igual que su raíz cuadrada.

Por el resultado anterior, si queremos saber si un número natural es primo, alcanza con ver si tiene por divisor a algún número menor o igual que su raíz cuadrada. Pero también sabemos que alcanza con analizar solamente los que sean primos. En síntesis, para ver si un número natural es primo o no lo es, analizamos si tiene por divisor a alguno de los primos menores o iguales que su raíz cuadrada.

Volvamos al número 721. Como $\sqrt{721} \approx 26{,}9$, alcanza con analizar si alguno de los primos menores o iguales que 26, es divisor de 721. Veámoslo:

2 no es divisor de 721 (no es par); 3 no es divisor de 721 (7+2+1=10, 10 no es múltiplo de 3); 5 no es divisor de 721 (no termina en 0 ni en 5); 7 es divisor de 721 (72-2 = 70 y 70 es múltiplo de 7). Luego, 721 no es primo.

Realizar las siguientes actividades luego de las Lecturas 2 y 3

Actividad 4

Resolver los siguientes ejercicios:

1) Sin realizar divisiones, completar con cruces el cuadro siguiente de acuerdo con que el número que encabeza cada fila sea divisible por los que encabezan las columnas:

Número	**Divisible por …**								
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**11**
288									
91									
9262									
200									
411									
70									

2) En cada caso, completar con un dígito de modo que el número resulte múltiplo del número que se indica:

a) 254_ múltiplo de 3

b) 85_1 múltiplo de 9

c) 6_1 múltiplo de 2

d) 43_2 múltiplo de 11

e) 15_4 múltiplo de 6

f) 85_41 múltiplo de 7

3) Sin realizar la división, indicar qué resto tiene cada uno de los siguientes números al dividir por el que se indica:

a) 71 por 3 b) 100 por 8 c) 133 por 4 d) 919 por 6

4) ¿Es cierto que si a cualquier múltiplo de 7 se le suma 1, se obtiene un múltiplo de 8?

5) ¿Por qué el número $2^3 . 3^4 . 5^4 . 7$ no es múltiplo de 33?

6) Decidir si cada uno de los siguientes números es o no primo:

a) 723 b) 91 c) 111

7) ¿Cuál es el menor número primo de cuatro dígitos?

Para leer luego haber resuelto la Actividad 4

Lectura 4: Presentación de los conjuntos numéricos

Los conjuntos numéricos constituyen el primer eje de estudio. En esta etapa a distancia, hemos trabajado con las nociones de divisibilidad en el conjunto de los naturales. Como cierre de esta primera parte, haremos una presentación de los distintos conjuntos numéricos. En la segunda etapa del curso, presencial, desarrollaremos otros aspectos de este tema.

♦ **Los números naturales**

Ya dijimos más arriba que los números *naturales* son los usados para contar. Al conjunto lo simbolizamos $\mathbb{N}$.

Podemos escribir que $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, \ldots\}$, que es una forma de listarlos de modo incompleto, debido a que es un conjunto infinito.

¿Qué se estudia en este conjunto? Una respuesta ya la tenemos en el trabajo anterior: la divisibilidad. Pero también situaciones como la siguiente:

Las chapas patentes de los automóviles son una combinación de 3 letras y 3 números. ¿Cuántas chapas patente distintas pueden armarse?

En problemas como éste, se pretende buscar una manera de *contar sin enumerar*. La Combinatoria se ocupa de dar respuestas a este tipo de situaciones y es un asunto de estudio en Álgebra I.

♦ **Los números enteros**

Al sumar dos números naturales cualesquiera, se obtiene como resultado otro número natural. Esto no ocurre con la resta: la resta de dos números naturales puede o no dar otro número natural: 7 – 3 = 4 pero 4 – 6 no puede realizarse en $\mathbb{N}$.

En otros términos, hay ecuaciones como $x + 2 = 0$, que no tienen solución en $\mathbb{N}$.

Para resolver este problema, creamos a los ***números enteros***, conjunto que simbolizamos $\mathbb{Z}$. Los enteros son los naturales, el 0 y los opuestos de los naturales. De modo incompleto por ser un conjunto infinito

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\ldots\}.$$

¿Qué se estudia en este conjunto? Como dijimos más arriba, la divisibilidad -que acá estudiamos en naturales-, es asunto específico de este conjunto. Como todo lo relativo a lo numérico, se estudia en Álgebra I.

♦ **Los números racionales**

La suma y el producto de dos números enteros cualesquiera, da por resultado un número entero. Pero no ocurre lo mismo al dividir dos números enteros cualesquiera (con el divisor distinto de 0); por ejemplo, 6 : 3 da un número entero pero 8 : 3, no.

De otro modo, hay ecuaciones como $2x+1=0$, que no tienen solución en $\mathbb{Z}$.

Para resolver ese problema, creamos a los ***números racionales***, conjunto que simbolizamos $\mathbb{Q}$. Los racionales son las fracciones, esto es, los cocientes de dos enteros con el divisor no nulo.

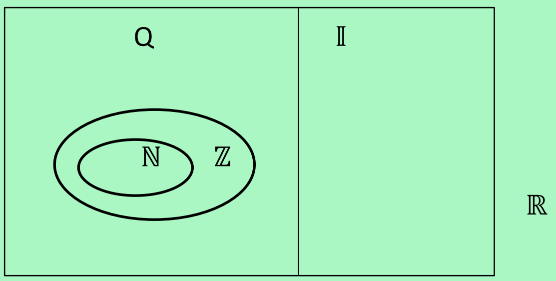
En este conjunto, un asunto de interés es la forma fraccionaria y el desarrollo decimal y los vínculos entre ellos.

♦ **Los números reales**

Todo número racional puede representarse con un punto en la recta numérica pero no todo punto de la recta numérica corresponde a un número racional. Esto significa que los números racionales no la "llenan". Hay otros números que les corresponde un punto de la recta numérica pero no son racionales, como $\sqrt{2}$ ó π. Estos números son los irracionales, es decir, aquellos que tienen infinitas cifras decimales no periódicas y, junto con los racionales, forman el conjunto de los *números reales* y lo simbolizamos $\mathbb{R}$.

Si volvemos a pensar en términos de ecuaciones, una ecuación tal como $x^2=2$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$. La ampliación de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ (es decir, la consideración de los irracionales) permite dar solución a ecuaciones de este tipo.

En el diagrama de Venn que sigue se muestra la relación de inclusión entre los distintos conjuntos numéricos usuales.



	Realizar la siguiente actividad luego haber realizado la Lectura 4

Actividad 5

Resolver los siguientes ejercicios:

1) Completar la tabla con cruces de acuerdo con que el número que encabeza cada fila pertenezca al conjunto numérico que encabeza cada columna**.**

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$^{23}/_{5}$					
$-34{,}13$					
$\sqrt{^{25}/_{2}}$					
0					
$-100,\widehat{23}$					
$-7,\hat{9}$					
$-7{,}9$					

2) Ubicar en un diagrama como el que se mostró en la Lectura 4, a los siguientes números:

$$\sqrt[5]{32};\ -{^7}/_5;\ 7,\widehat{21};\ \sqrt{101};\ -10;\ 2\pi;\ 0{,}1$$

EJE TEMÁTICO 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES

En esta primera etapa, presentamos a las expresiones algebraicas, trabajamos con expresiones algebraicas equivalentes y con ecuaciones sencillas y nos introducimos al estudio de los polinomios

Realizar la siguiente actividad

Actividad 1

Se diseña una secuencia de figuras cuadradas usando palitos iguales para cada lado. Los primeros cuatro pasos de la secuencia se muestran a continuación.

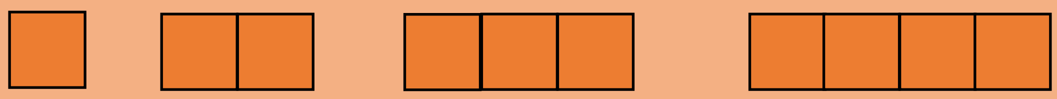


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

Suponiendo que se continúa la secuencia siguiendo el mismo patrón,

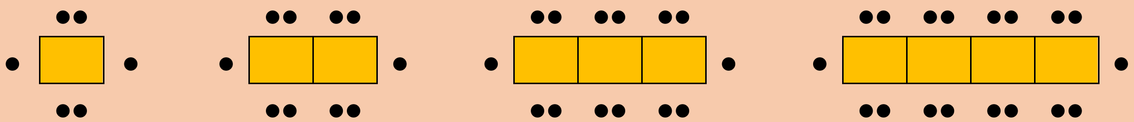
a) ¿cuántos palitos son necesarios en la figura número 56?

b) ¿hay alguna figura que invierte 274 palitos para armarla?

Para leer luego haber resuelto la Actividad 1

Lectura 1: Expresiones algebraicas

La secuencia que se muestra a continuación corresponde a un cierto ordenamiento de mesas y sillas.



Si se sigue con el mismo criterio, ¿cuántas sillas se necesitan cuando se colocan 20 mesas?

En la secuencia dibujada, vemos que por cada mesa tenemos 4 sillas (es decir, 4 por la cantidad de mesas), a lo que se suman las 2 sillas de las cabeceras. Entonces, si se colocan 20 mesas, habrá $4\,.\,20 + 2 = 82$ sillas.

Podríamos haber contado las sillas de otro modo. Cuando hay una sola mesa, se necesitan 6 sillas. Al agregar una mesa, se agregan 4 sillas más. Esto se repite por cada mesa que se agrega. Entonces, la cantidad de sillas es 6 más 4 veces la cantidad de mesas menos 1. Si se colocan 20 mesas, habrá $6 + 4\,.\,19 = 82$ sillas.

En Matemática se usa lenguaje simbólico para comunicar las producciones y esta situación es propicia para mostrar esto.

Si llamamos *n* a la cantidad de mesas y *S* a la cantidad de sillas, en la primera forma de contar, tenemos que $S = 4.n + 2$; en la segunda forma, $S = 6 + 4.(n - 1)$.

Las expresiones anteriores son ejemplos de *expresiones algebraicas*. Además, como son dos formas distintas de contar lo mismo, cada vez que se asigna un cierto valor a *n*, ambas expresiones devuelven el mismo valor de *S*. Cuando esto ocurre para todos los valores posibles de *n*, decimos que son dos *expresiones algebraicas equivalentes*. En nuestro caso, al representar a la cantidad de mesas, *n* es cualquier número natural.

Avancemos un poco más sobre esto. Supongamos que las expresiones anteriores nos son dadas pero descontextualizadas del problema de las mesas y sillas. Es decir, solo se nos dan las expresiones $S = 4.n + 2$ y $S = 6 + 4.(n - 1)$, en donde *n* puede tomar cualquier valor real. Nos preguntamos, ¿son equivalentes?

Resulta imposible probar uno a uno con todos los números reales para ver que ambas expresiones arrojan el mismo valor para cada asignación de *n*, ya que son infinitos valores. Tenemos que buscar otra manera.

Si trabajamos la expresión $S = 6 + 4.(n - 1)$, usando operatoria simple:

$$S = 6 + 4.(n - 1) = 6 + 4n - 4 = 4n + 2$$

Hemos llegado a que la expresión $S = 6 + 4.(n - 1)$ puede transformarse en $S = 4n + 2$. Esto prueba que las dos expresiones son equivalentes. Entonces, una forma de ver si dos expresiones algebraicas son equivalentes es transformar una en la otra, mediante operatoria.

Consideremos ahora la expresión $S = n^2 + 6 - (n - 2)^2$. ¿Es también equivalente a las anteriores?

Para decidir, operemos sobre la nueva expresión.

$$S = n^2 + 6 - (n - 2)^2 = n^2 + 6 - (n^2 - 4n + 4) = n^2 + 6 - n^2 + 4n - 4 = 4n + 2$$

Hemos transformado a la expresión dada en la anterior, por lo tanto, son equivalentes.

Veamos una expresión más: $S = n^2 + 5$. ¿Es también equivalente a las anteriores?

Parece que no; pero es necesario dar alguna razón matemáticamente válida. Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando para cada uno de los valores posibles de la variable, ambas devuelven el mismo valor. Entonces, si hay algún valor de la variable para el cual no coinciden los valores que devuelve cada expresión, las expresiones no son equivalentes.

Cuando $n = 1$, ambas expresiones toman el valor 6: $S = 4.1 + 2 = 6$ y $S = 1^2 + 5 = 6$.

Pero para $n = 2$, se obtienen valores diferentes: $S = 4.2 + 2 = 10$ y $S = 2^2 + 5 = 9$.

Con esto queda probado que las expresiones $S = 4n + 2$y $S = n^2 + 5$ no son equivalentes.

Es importante observar que para garantizar que dos expresiones algebraicas no son equivalentes, debe mostrarse algún valor para el cual ambas expresiones toman valores diferentes. No alcanza con que no “parezcan” la misma.

Volvamos al problema de las mesas y las sillas. Nos preguntamos: ¿es posible que haya un cierto ordenamiento para el que se necesiten 120 sillas?

Para responder a esto, tenemos que ver si hay algún valor de *n* para el cual $4n + 2$ da por resultado 120. Esto equivale a resolver la ecuación $4n + 2 = 120$:

$4n + 2 = 120$ $\quad$ $4n = 120 - 2$ $\quad$ $4n = 118$ $\quad$ $n = 118{:}\,4 = 29{,}5$

Entonces, podemos decir que no hay ninguna cantidad de mesas para la que se necesiten exactamente 120 sillas ya que no es posible que la cantidad de sillas no sea entera.

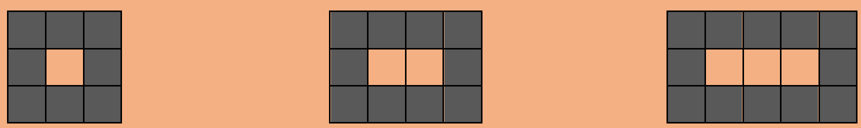
Para resolver luego de la Lectura 1

Actividad 2

Revisar la resolución de la Actividad 1

Actividad 3

1) A continuación se muestran algunos ejemplos de un diseño de baldosas, realizado con baldosas grises que rodean a baldosas blancas.



Si se continúa armando el diseño con el mismo criterio:

a) ¿cuántas baldosas grises se necesitan cuando se utilizan 18 baldosas blancas? ¿Y si se usaran 32?

b) ¿es posible que algún diseño utilice 91 baldosas grises? ¿Y 80? ¿Y 102?

c) ¿es cierto que no hay ningún diseño en el que la cantidad de baldosas grises es impar?

2) Dar una expresión algebraica que represente a cada uno de los siguientes enunciados:

a) el cubo de la diferencia entre dos números

b) El doble del cubo de un número, más el cuadrado del triple de otro

c) La mitad del producto de un número y el cuadrado de otro

d) El cociente entre un número y el triple de otro

e) La mitad del producto de la base y la altura de un rectángulo

3) Escribir en lenguaje natural a las siguientes expresiones algebraicas

a) $3.(a+b)$

b) $3a^2 + 5b$

4) Calcular el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para cada uno de los valores indicados de las variables.

a) $20a^2 - \frac{1}{2}b^3$, con $a = 2$ y $b = -1$

b) $\frac{-x^2}{x-y}$, con $x = -1$ y $y = -\frac{2}{3}$

5) Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

a) $1 - \frac{3}{4}(x-2) = -\frac{1}{3}$

b) $3 - \frac{x}{2} = -2x$

c) $\frac{x-1}{2} + 3 = \frac{2-3x}{3}$

Para leer luego de resolver las Actividades 2 y 3

Lectura 2: Polinomios

Vamos a analizar un tipo particular de expresiones algebraicas. Los siguientes son algunos ejemplos:

$p(z) = -\frac{2}{3}z^2$ $\qquad$ $q(b) = 7b^5$

Estas expresiones algebraicas están formadas por un solo término, compuesto por el producto entre una parte numérica (coeficiente) y una parte literal tiene la forma x^n, con *n* natural. Las llamamos *monomios*. El exponente al que está elevada la indeterminada es el *grado* del monomio.

Un monomio como $r(x) = 4$ tiene grado 0 porque $r(x) = 4.x^0$. Y un caso particular es el monomio $s(x) = 0$, al que llamamos *monomio nulo*. Este monomio no tiene grado.

Un monomio puede tener varias indeterminadas, como $t = 5.a^4b^3$ (en este caso, el grado es 7). Sin embargo, será usual que trabajemos con monomios en una indeterminada.

Decimos que dos monomios son *semejantes* cuando tienen igual parte literal.

Hay otro tipo de expresiones algebraicas que nos interesan especialmente y que están vinculadas con los monomios: son los *polinomios*. Podemos pensar a un polinomio como una suma de monomios no semejantes.

Ejemplos: $p(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 3$ $\qquad q(x) = -x^6 - x + 1$

El *grado de un polinomio* es el grado del monomio de mayor grado. Así, *p* es un polinomio de grado 3 y q es un polinomio de grado 6.

El coeficiente del término de mayor grado es el *coeficiente principal*. Así, en *p* es $\frac{4}{3}$ y en *q* es -1.

Operaciones con polinomios:

Consideremos los siguientes polinomios: $p(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1$ y $q(x) = x - 2$

Suma: se suman los monomios semejantes.

$p(x) + q(x) = (2x^4 - x^3 + 2x - 1) + (x - 2) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1 + x - 2 = 2x^4 - x^3 + 3x - 3$

Resta: es la suma del primer polinomio y el opuesto del segundo: $p(x) - q(x) = p(x) + \big(-q(x)\big)$

Multiplicación: se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma / resta y se utilizan las propiedades básicas de la potenciación

$$
\begin{aligned}
p(x).q(x) &= (2x^4 - x^3 + 2x - 1).(x - 2) = 2x^5 - x^4 + 2x^2 - x - 4x^4 + 2x^3 - 4x + 2 \\
&= 2x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 5x + 2
\end{aligned}
$$

División: a continuación, se muestra el procedimiento para dividir polinomios

$$
\begin{array}{ccccc|l}
2x^4 & -x^3 & & +2x & -1 & x \quad -2 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & 4x^3 & & & & 2x^3 \quad +3x^2 \quad +6x \quad +14 \\
\cline{1-2}
 & 3x^3 & & & & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 6x^2 & & & \\
 & & -6x^2 & +12x & & \\
\cline{3-4}
 & & & 14x & -1 & \\
 & & & -14x & +28 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 27 &
\end{array}
$$

El cociente es $c(x) = 2x^3 + 3x^3 + 6x + 14$ y el resto es $r(x) = 27$

Si el divisor es un polinomio de grado 1 con coeficiente principal 1, la división puede resolverse con la Regla de Ruffini[1], en la que se utilizan sólo los coeficientes, dispuestos en una tabla. El procedimiento es una disposición práctica resumida del algoritmo de división. Aplicado al ejemplo anterior:

[1] Paolo Ruffini (1765 - 1822) fue un matemático italiano

	2	− 1	0	2	− 1
2		4	6	12	28
x	2	3	6	14	27

La primera fila contiene a los coeficientes del dividendo y el número que aparece aparte es el término independiente del divisor cambiado de signo. Los números obtenidos en la última fila (menos el último) son los coeficientes del cociente; el último número de la fila es el resto de la división.

Para resolver luego de la Lectura 2

Actividad 4

1) ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas con monomios?

$r(x) = 2\sqrt{x}$ $\qquad s(x) = \sqrt{2}.x$ $\qquad t(x) = \frac{2}{x} + 1$

2) Dar el valor numérico de los siguientes polinomios para los valores indicados de la indeterminada.

$r(x) = -2x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x - 1$, para $x = -2$ $\qquad s(x) = x^2 - 2$, para $x = -\sqrt{2}$

3) ¿Por qué decimos que el polinomio nulo no tiene grado?

4) Proponer un polinomio de grado 5 que tenga dos coeficientes nulos y sólo un coeficiente irracional

5) Dados los polinomios $P(x) = -3x^2 + 10x^4 - x - 9$ y $Q(x) = 5x^2 - x - 2$, calcular:

a) $P(x)\,.\,Q(x)$ $\qquad$ b) $P(x) : Q(x)$

c) $Q(x) : P(x)$, siendo P y Q los polinomios dados en a) $\qquad$ d) $\left(P(x)\right)^2$

e) $3.\,Q(x) - P(x).\,Q(x) + \left(P(x)\right)^2$

6) Hallar cociente y resto de las siguientes divisiones (usar la regla de Ruffini cuando se pueda):

a) $P(x) : Q(x)$, siendo $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$ y $Q(x) = x + 2$

b) $P(x) : Q(x)$, siendo $P(x) = \frac{2}{5}x^4 - 3x^3 - 7x + \frac{1}{2}$ y $Q(x) = x - \frac{1}{2}$

7) Dados los siguientes polinomios:

$$p(x) = -2x^3 + 4x - 3;\ q(x) = 4x^5 - 2x;\ r(x) = x + 4;\ s(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 1$$

resolver las siguientes operaciones:

a) $p(x) - s(x)$ $\qquad$ b) $p(x).\,r(x) + q(x)$ $\qquad$ c) $p(x): r(x)$ $\qquad$ d) $q(x): p(x)$

EJE TEMÁTICO 3: ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

Sobre Geometría, en esta primera etapa, trabajamos con el teorema de Pitágoras y nociones de Trigonometría del triángulo rectángulo

Realizar la siguiente actividad

Actividad 1

Las siguientes ternas corresponden a las medidas de los lados de triángulos. ¿Cuáles son rectángulos?

a) 6, 8 y 10   b) $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ c) 5, 9 y 6

Para leer luego de resolver la Actividad 1

Lectura 1: Teorema de Pitágoras

Leer el material sobre el *Teorema de Pitágoras* que se presenta al final de este apunte, que comienza con el título “Área y rompecabezas” (el material está extraído del libro *Matemática en Contexto*, de Carnelli, Cesaratto, Falsetti, Formica y Marino)

Realizar las siguientes actividades, luego de la Lectura 1

Actividad 2

Revisar la resolución de la Actividad 1

Actividad 3

1) ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 cm?

2) ¿Cuánto miden los catetos de un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 2 cm?

3) Explicar por qué no puede haber un triángulo que sea rectángulo y equilátero

Para leer luego de resolver las Actividades 2 y 3

Lectura 2: Trigonometría en el triángulo rectángulo

Leer el material sobre *Trigonometría en el triángulo rectángulo* que se presenta al final de este apunte, que comienza con el título "Proporciones en Geometría" (el material también está extraído del libro *Matemática en Contexto*, de Carnelli, Cesaratto, Falsetti, Formica y Marino)

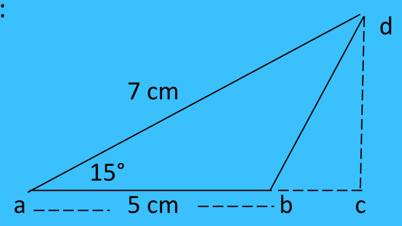
Realizar las siguientes actividades luego de la Lectura 2

Actividad 4

1) Una escalera de 4 m se apoya contra la pared, de modo de que el ángulo que queda formado entre ella y el suelo es de 55°. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

2) Desde un avión que vuela a 1000 metros de altura se divisa un objetivo en tierra bajo un ángulo de depresión de 20°. ¿Qué distancia separa al avión del objetivo? (Nota: el ángulo de depresión se mide respecto de la horizontal de la visual)

3) Hallar la medida del ángulo dbc:



4) En el triángulo abc, rectángulo en b, el lado ac mide $8\sqrt{3}$ cm y el lado ab mide 4 cm. Hallar el valor de los ángulos agudos del triángulo.

5) En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 10 cm y la altura del triángulo respecto de ese lado mide 15 cm. ¿Cuánto miden los ángulos interiores del triángulo?

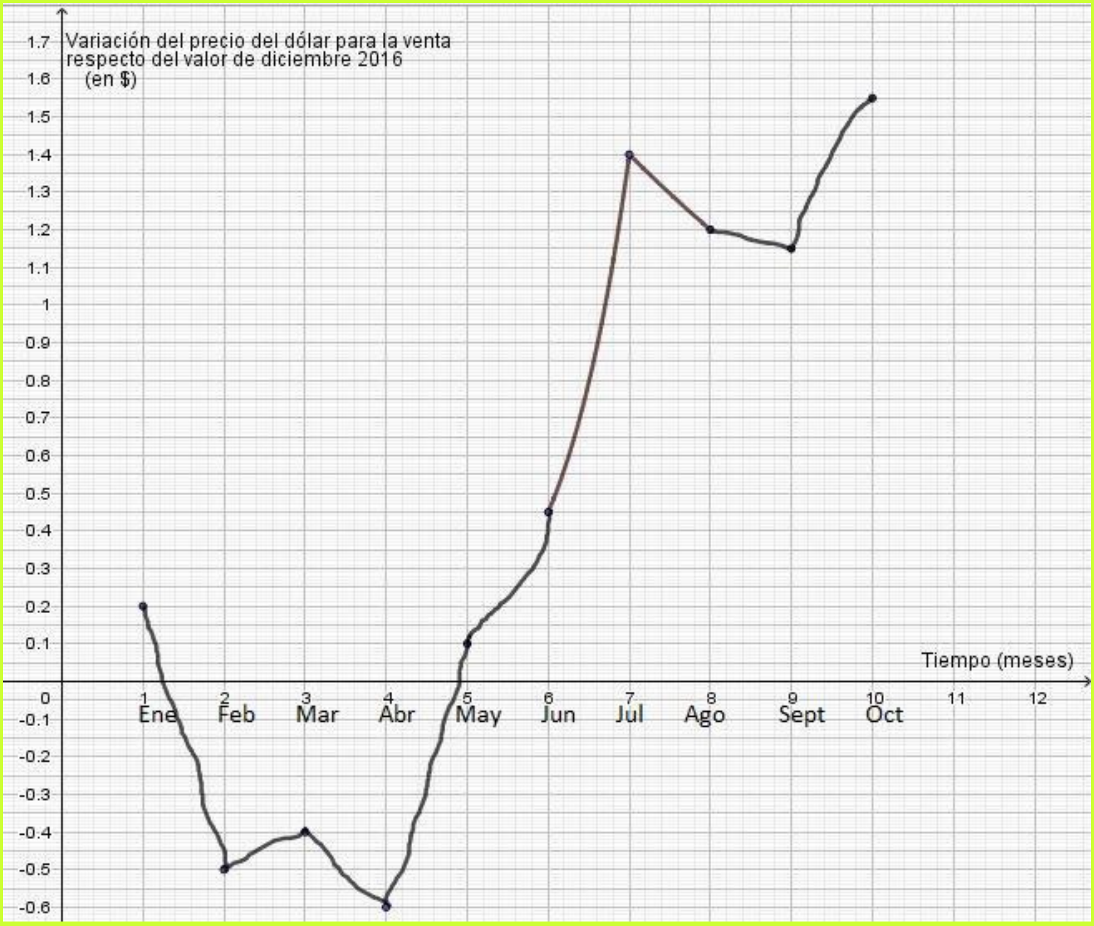
EJE TEMÁTICO 4: FUNCIONES

En esta primera etapa, estudiaremos qué son las funciones y sus elementos básicos, que nos ayudan a entender y modelizar situaciones y/o fenómenos concretos

Resolver la siguiente actividad

Actividad 1

El valor promedio del precio del dólar -para la venta- en diciembre de 2016 fue de $ 16. El siguiente gráfico muestra cuánto varió en pesos el valor de esta moneda en el primer día hábil de cada mes del año 2017 desde enero hasta octubre. Por ejemplo, la coordenada (5; 0,1) indica que el primer día del mes de mayo, el precio del dólar fue de $ 0,1 más que $ 16 (es decir 10 centavos más que el valor promedio de diciembre 2016), entonces el 1 de mayo del 2017, el precio del dólar fue de $ 16,10.



a) ¿Con qué valor del dólar comenzó el año 2017?

b) ¿Cuál fue el valor del dólar el primer día hábil de cada mes?

c) ¿Qué representan en el gráfico los valores positivos del eje vertical? ¿Y los negativos?

d) ¿Hubo algún momento entre enero y octubre en que el valor del dólar fue igual al promedio de diciembre de 2016?

e) ¿Durante cuántos meses completos se hizo la observación de los valores del dólar para realizar el gráfico? ¿Entre qué valores estuvo la variación durante ese tiempo? ¿Cuál es la mínima y máxima variación que podría haber tenido el valor del dólar?

	Para leer luego de resolver la Actividad 1

Resolución de la Actividad 1 e introducción de nuevas nociones

Observando el gráfico de la Actividad 1, podemos ver que comienza en el punto (1; 0,2). Es decir, que el primer día hábil de enero de 2017 la variación del dólar respecto del promedio de diciembre 2016 fue de $ 0,2 por arriba de los $ 16, por lo tanto, el valor del dólar al comienzo del 2017 fue de $ 16,20, y así hemos respondido a la pregunta a).

De la misma forma, podemos pensar el precio del dólar el primer día hábil de cada mes entre enero y octubre –y así responder la pregunta b)-, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Coordenadas del punto de la gráfica	**Información**	**Precio del dólar (en $)**
(1; 0,2)	El primer día hábil del primer mes del año 2017 (enero) el precio del dólar varió $ 0,20 respecto de los $ 16 promedio en diciembre de 2016	16 + 0,20 = 16,20
(2; -0,5)	El primer día hábil de febrero el precio del dólar disminuyó $ 0,50 respecto de $ 16	16 -0,50 = 15,50
(3; -0,4)	El primer día hábil de marzo el precio del dólar disminuyó $ 0,40 respecto de $ 16	16 – 0,40 = 15,60
(4; -0,6)	El primer día hábil de abril el precio del dólar disminuyó $ 0,60 respecto de $ 16	16 – 0,60 = 15,40
(5; 0,1)	El primer día hábil de mayo el precio del dólar aumentó $ 0,10 respecto de $ 16	16 + 0,10 = 16,10
(6; 0,45)	El primer día hábil de junio el precio del dólar aumentó $ 0,45 respecto de $ 16	16 + 0,45 = 16,45
(7; 1,4)	El primer día hábil de julio el precio del dólar aumentó $ 1,40 respecto de $ 16	16 + 1,40 = 17,40
(8; 1,2)	El primer día hábil de agosto el precio del dólar aumentó $ 1,20 respecto de $ 16	16 + 1,20 = 17,20
(9; 1,15)	El primer día hábil de septiembre el precio del dólar aumentó $ 1,15 respecto de $ 16	16 + 1,15 = 17,15
(10; 1,55)	El primer día hábil de octubre el precio del dólar aumentó $ 1,55 respecto de $ 16	16 + 1,55 = 17,55

Tal como se indica en la tabla, los valores positivos que se observan en el eje vertical indican variación positiva del precio del dólar, por lo tanto, para esos días del año el valor del precio del dólar ha aumentado respecto de los $ 16 promedio de diciembre de 2016. En cambio, los valores negativos indican que, en esos momentos del período de tiempo analizado, el precio del dólar ha disminuido y entonces fue menor de $ 16. Todo lo dicho anteriormente, responde a la pregunta c).

Para responder a la pregunta d), es decir si en algún momento del período analizado el valor del dólar fue exactamente $ 16, tenemos que observar si hubo algún día en que no hubo variación (es decir que la misma fue $ 0), y eso se pude ver en aquellos puntos de la gráfica cuya segunda coordenada es cero, es decir cuando el trazo de la gráfica interseca al eje horizontal.

Importante: recordemos que en un gráfico cartesiano se llama ***eje de abscisas*** al eje horizontal, y que al eje vertical se lo llama ***eje de ordenadas.***

En el gráfico no se ve con precisión la abscisa en que el trazo de la gráfica corta al eje de abscisas, pero podemos afirmar que fue durante los primeros días del mes de enero, aproximadamente en el punto (1,2; 0) y luego sucede lo mismo casi al final del mes de abril, aproximadamente en el punto (4,9; 0).

Como la observación de la variación del precio del dólar comienza el primer día hábil del mes de enero y termina el primer día hábil de octubre, podemos responder a la pregunta e) diciendo que se observaron 9 meses completos y que la variación fue entre $ -0,6 y $ 1,55. Pero la mínima variación que podría haber tenido el precio del dólar es $ -16 (sin incluir este valor pues sino el valor del dólar sería $ 0, es decir, “lo regalarían”) pero no hay un valor máximo de variación ya que el precio podría aumentar todo lo que uno pueda imaginar (esto es en forma hipotética, puesto que nadie pensaría que el precio del dólar pueda ser $ 1000, por ejemplo).

Todas las conclusiones anteriores, que a su vez responden a las preguntas iniciales, podemos expresarlas en términos de matemáticos que darán una definición y características del concepto de ***FUNCIÓN.***

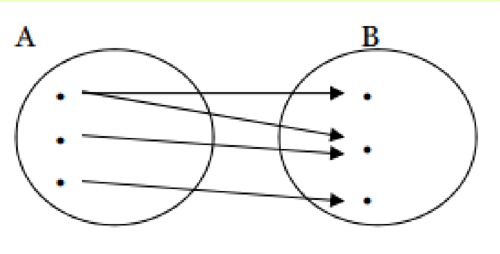
Una ***función*** de un conjunto A en un conjunto B es una relación que asocia ***cada elemento*** o valor x de A un *<u>único</u>* elemento o valor y de B, llamado su *imagen*.

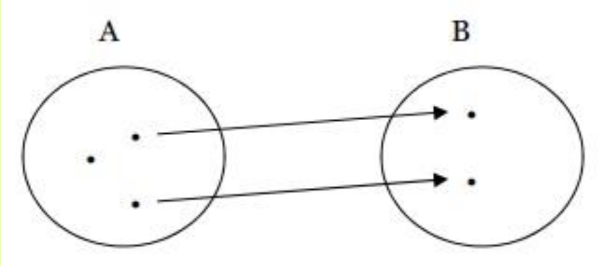
En símbolos: la relación $f: A \to B$ es una *función* si y sólo si para todo $x \in A$ existe un único $y \in B$ que es su imagen, esto es $y = f(x)$.

La situación de la Actividad 1 representa una función, puesto que a cada día del período de tiempo observado le corresponde un único valor (oficial) del precio del dólar, y por eso le corresponde una única variación. Y así podemos decir para cada día cuál es su imagen, por ejemplo para el primer día hábil del mes de junio le corresponde $ 0,45 de variación, entonces y = 0,45 es la imagen de x = 6, o en símbolos f(6)=0,45.

Por eso, si consideramos los siguientes diagramas de Venn que representan relaciones, en el primer caso no es función puesto que observamos que hay valores (elementos) en el conjunto A que le corresponden más de un elemento en el conjunto B.

El segundo caso tampoco corresponde a una función puesto que observamos que hay elementos del conjunto A para los cuales no existe relación con algún elemento de B, por lo tanto.





Entonces también podemos decir que el gráfico de la Actividad 1 corresponde a una función porque cumple con las condiciones de existencia y unicidad.

Importante: una función modeliza una situación en la que hay una relación de dependencia entre dos *variables* que intervienen en esa situación. La variable $x \in A$ se denomina *variable independiente* y la variable $y \in B$ se denomina *variable dependiente*.

Para nuestro caso, la variable independiente es el tiempo y la variación del precio del dólar es la variable dependiente.

Además, la función está definida para valores de abscisas que son los números reales mayores o iguales que 1 y menores o iguales que 10; este conjunto de valores se denomina *dominio de la función*, y para el problema, es el intervalo $[1; 10]$.

Por otro lado, tal como hemos reflexionado antes, la variación mínima podría haber sino $ -16 sin incluir este valor y no hay "tope" máximo, es decir que las ordenadas (valores de y) de la función podrían haber sido cualquier número real del intervalo $(-16; +\infty)$, este conjunto se denomina *codominio de la función.*

Pero los verdaderos valores que asumieron las ordenadas de la función fueron todos los números reales entre -0,6 y 1,55; este conjunto de valores se denomina *conjunto imagen de la función*, y para el problema es el intervalo $[-0{,}6; 1{,}55]$.

Resumiendo:

• El ***dominio*** de una función es el conjunto de todos los valores de la variable independiente, es decir de las abscisas de los puntos, para los cuáles está definida la relación. Se simboliza *Dom(f)*.

• El ***codominio*** de una función es un conjunto que incluya los posibles valores de la variable dependiente, es decir las ordenadas de los puntos, que podrían ser imagen de algún valor del dominio. Se simboliza *Cod(f)*.

• El **conjunto imagen** de una función es el que está formado por todos los valores de la variable dependiente, es decir todas las ordenadas de los puntos, que forman parte de la relación siendo imagen de algún valor del dominio. Se simboliza *Im(f)*.

Como ya analizamos, la variación del dólar es cero en dos momentos entre enero y octubre del 2017. Según el gráfico vimos que aproximadamente esto se da en los puntos de abscisa 1,2 y 4,9 pues en estos valores la curva corta al eje de abscisas. A estos valores se los llama *raíces* o *ceros* de la función y juntos forman el *conjunto de ceros de la función.*

Por otro lado, vemos que la variación del precio del dólar es positiva cuando la curva que representa la función está por encima del eje de abscisas, y esto se da si los valores de x están entre 1 y 1,2 (aprox) o entre 4,9 (aprox) y 10. Dichos intervalos de números reales conforman lo que se llama *conjunto de positividad de la función.* Análogamente podemos observar que la variación del precio del dólar es negativa cuando la gráfica de la función está por debajo del eje de abscisas, es decir si los valores de x están entre 1,2 y 4,9 aproximadamente. Dicho intervalo de números reales constituye lo que se conoce como conjunto de negatividad de la función.

Sintetizando:

• El ***conjunto de ceros*** de una función, el cual se simboliza como C^0, es el formado por todas las raíces o ceros de ésta, es decir todas las abscisas de la función cuya imagen es 0. Gráficamente son las intersecciones de la curva que representa la función con el eje de abscisas. Para el problema es $C^0 = \{1,2 ; 4,9\}$.

• El ***conjunto de positividad*** de una función está compuesto por todos los valores del dominio cuyas imágenes son positivas. Se simboliza C^+. Gráficamente, son las abscisas de los puntos cuyas ordenadas están arriba del eje de abscisas. Para el problema es $C^+ = [1; 1{,}2) \cup (4{,}9;\ 10]$

• El ***conjunto de negatividad*** de una función está compuesto por todos los valores del dominio cuyas imágenes son negativas. Se simboliza C^-. Gráficamente, son las abscisas de los puntos cuyas ordenadas están debajo del eje de abscisas. Para el problema es $C^- = (1{,}2\ ; 4{,}9)$.

	Resolver la siguiente actividad

Actividad 2

Responder las siguientes preguntas, referidas nuevamente a la actividad 1.

a) ¿Durante qué momentos ha aumentado la variación del precio del dólar?

b) ¿Durante qué momentos ha disminuido la variación del precio del dólar?

c) ¿Cuál ha sido la variación máxima y mínima entre el primer día hábil de enero y el de septiembre? ¿Y entre el primer día hábil de febrero y el de abril? ¿Y en todo el dominio de la función del problema?

Para leer luego de resolver la Actividad 2

Resolución de la Actividad 2 e introducción de nuevas nociones

Para responder las preguntas a) y b), debemos observar para qué intervalos de tiempo se han incrementado o disminuido los valores de las variaciones del precio del dólar. En otras palabras, debemos mirar para qué valores de las abscisas, aumentan o disminuyen sus correspondientes ordenadas cuando ellas (las abscisas) aumentan. Así, podemos decir que entre el primer día hábil de febrero y el del marzo la variación del dólar ha ido en aumento, como también entre el primer día hábil de abril y el de julio, y entre el primer día hábil de septiembre y octubre. Todos esos intervalos de valores se denominan ***intervalos de crecimiento*** de la función o también se puede decir que en dichos intervalos la función es ***creciente***.

Podemos razonar de manera similar para decidir en qué momentos la variación del dólar ha disminuido. Así podemos decir que esto ocurre entre el primer día hábil del año y el primer día hábil de febrero, como también entre el primer día hábil de marzo y el de abril, y entre el primer día hábil de julio y septiembre. Y al igual que antes, son los denominados intervalos de decrecimiento de la función o también son los intervalos en que la función es decreciente.

Por lo tanto:

- Una función es ***creciente*** en intervalos de su dominio donde a medida que aumentan los valores de las abscisas también aumentan sus correspondientes imágenes. Para el problema de la Actividad 1 los intervalos de crecimiento de la función, es decir aquellos para los cuales la función es creciente, son: (2;3), (4; 7) y (9; 10).

- Una función es ***decreciente*** en intervalos de su dominio donde a medida que aumentan los valores de las abscisas, disminuyen sus correspondientes imágenes. Para el problema de la Actividad 1 los intervalos de decrecimiento de la función, es decir aquellos para los cuales la función es creciente, son: (1; 2), (3; 4) y (7; 9).

Para responder las preguntas del ítem c) tenemos que ir observando lo que sucede con la gráfica de la función en cada intervalo de tiempo que se menciona e identificar los puntos más altos de la curva o lo más bajos para decir cuáles son máximos o mínimos respectivamente.

Así, entre el primer día hábil de enero y el de septiembre observamos que la variación máxima se da el primer día hábil de Julio y la mínima, el primer día hábil de abril. Las ordenadas de dichos puntos se denominan ***máximos y mínimos absolutos***, respectivamente, para el intervalo del dominio que hemos analizado. Entonces en el intervalo $[1; 9]$ incluido en el dominio, decimos que el máximo absoluto es 1,4 y se alcanza en *x = 7*, o que (7; 1,4) es el punto máximo absoluto de la función y que el mínimo absoluto es -0,6 y se alcanza en *x = 4*, o que el punto mínimo absoluto de la función es (4; -0,6).

A su vez, en el mismo intervalo que estamos analizando, se pueden observar puntos en los que antes de ellos la función crece y luego decrece o viceversa, y que visualmente también representan "picos" en la gráfica de la función como lo son los puntos máximos y mínimos absolutos que antes definimos. En estos puntos cuyas ordenadas muestran que antes y después de ellos la función cambia de ser creciente a decreciente o viceversa, se denominan ***máximos o mínimos locales o relativos.*** Entonces, para el intervalo $[1; 9]$ del dominio de la función, los puntos máximos relativos son: (3; -0,4) y (7; 1,4) (éste último además es máximo absoluto). Y los puntos mínimos relativos en este intervalo son: (2; -0,5) y (4, -0,6) (éste además es mínimo absoluto).

Entonces:

- Si $a \in Dom(f)$, $f(a)$ es *máximo absoluto* de la función *f* si para todo $x \in Dom(f)$, $f(a) \geq f(x)$.
- Si $a \in Dom(f)$, $f(a)$ es *mínimo absoluto* de la función *f* si para todo $x \in Dom(f)$, $f(a) \leq f(x)$.
- Si $a \in (x_1; x_2) \subset Dom(f)$, $f(a)$ es *máximo relativo* de la función *f* si para todo

  $x \in (x_1; x_2)\ se\ cumple\ que\ f(a) > f(x)$.
- Si $a \in (x_1; x_2) \subset Dom(f)$, $f(a)$ es *mínimo relativo* de la función *f* si para todo

  $x \in (x_1; x_2)\ se\ cumple\ que\ f(a) < f(x)$.

Ahora, continuemos respondiendo las preguntas del ítem c): Entre el primer día hábil de febrero y el de abril, es decir en el intervalo $[2; 4]$, la variación mínima se da el primero de abril. O sea que el mínimo absoluto en ese intervalo es -0,6 que se alcanza en *x = 4*. Y el máximo absoluto en ese intervalo es -0,4 que se alcanza en *x = 3*.

Pero considerando todo el dominio, teniendo en cuenta las definiciones de extremos absolutos y relativos, se puede afirmar que la variación máxima es 1,55 que corresponde al valor máximo absoluto de la función, el cual se alcanza en el valor de abscisa *x = 10*, o sea el primer día hábil de octubre. Y la variación mínima es -0,6 que corresponde al valor mínimo absoluto de la función y se da en *x = 4*, es decir el primer día hábil de abril.

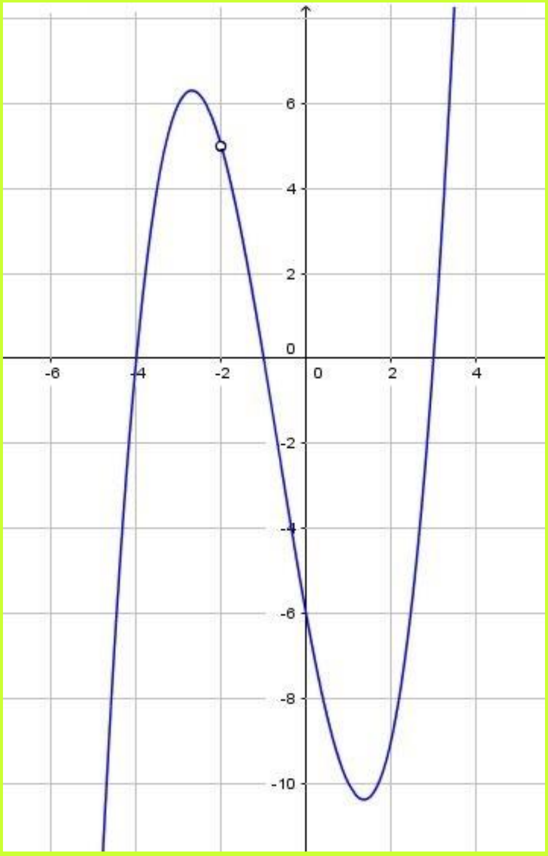
A su vez, observando toda la función se puede decir que la función presenta tres mínimos relativos que son: (2; -0,5), (4; -0,6) y (9; 1,15). Y también la función tiene tres máximos relativos que son: (3; -0,5) y (7; 1,4).

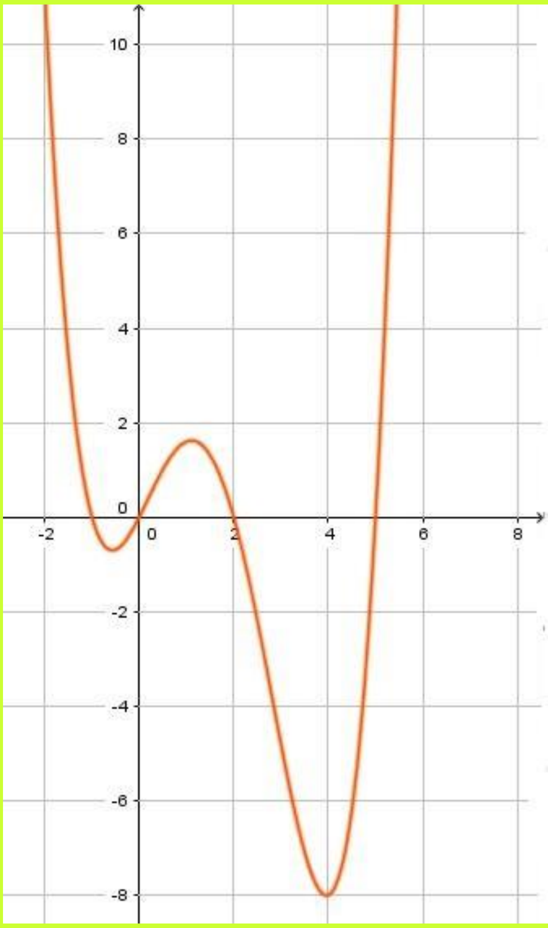
Observar que para la función en todo su dominio el punto (4; -0,6) es mínimo absoluto y relativo a su vez, pero el punto (10; 1,55) es sólo máximo absoluto (y no relativo).

Resolver las siguientes actividades

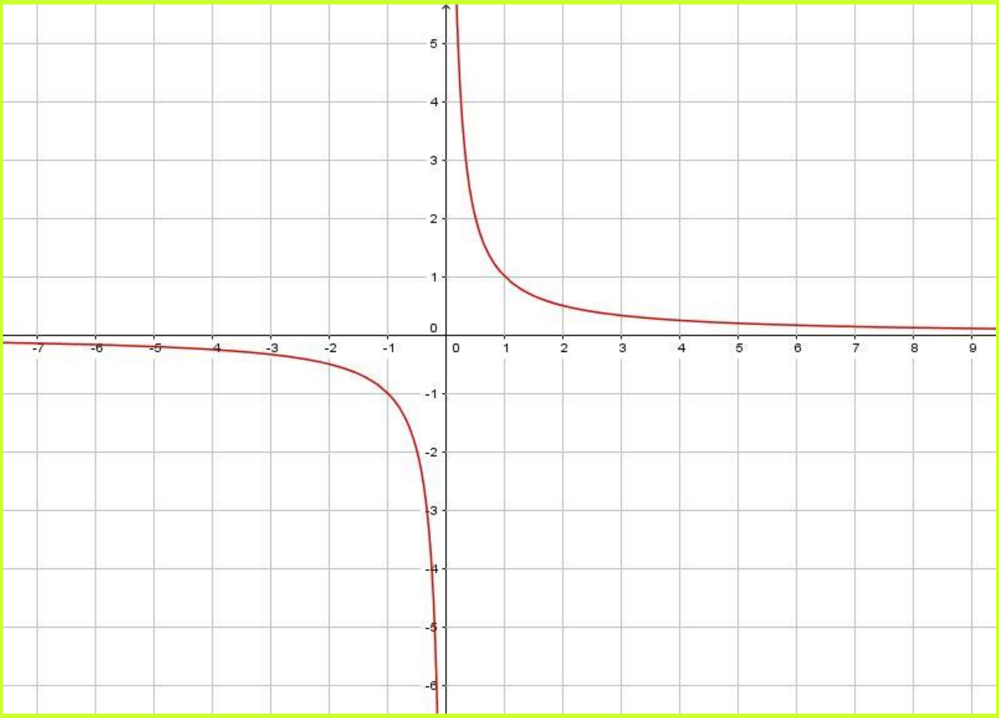
Actividad 3

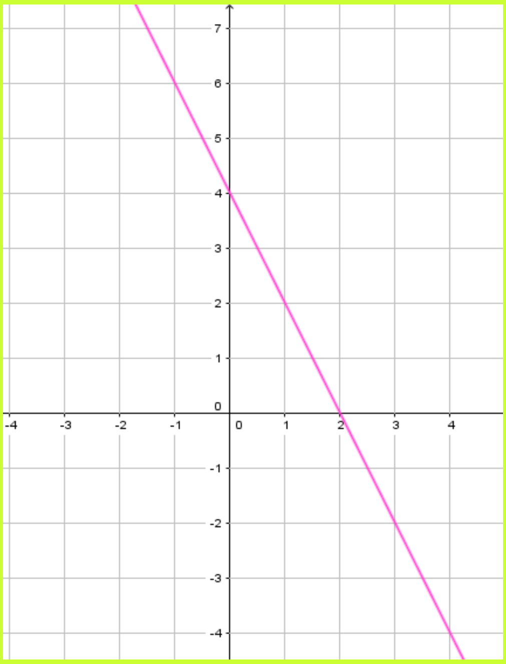
Observando las siguientes gráficas, determine (justificando) cuáles corresponden a funciones de ℝ en ℝ (es decir con dominio y codominio en el conjunto de los números reales). En las que sean funciones, determinar el conjunto imagen.

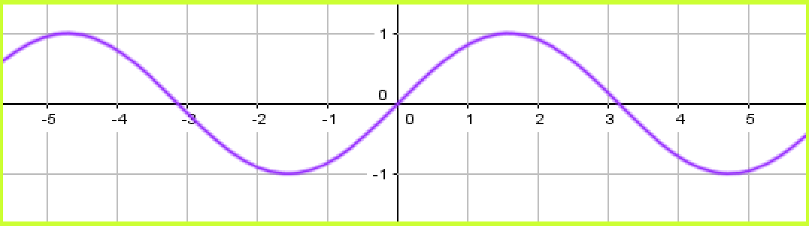


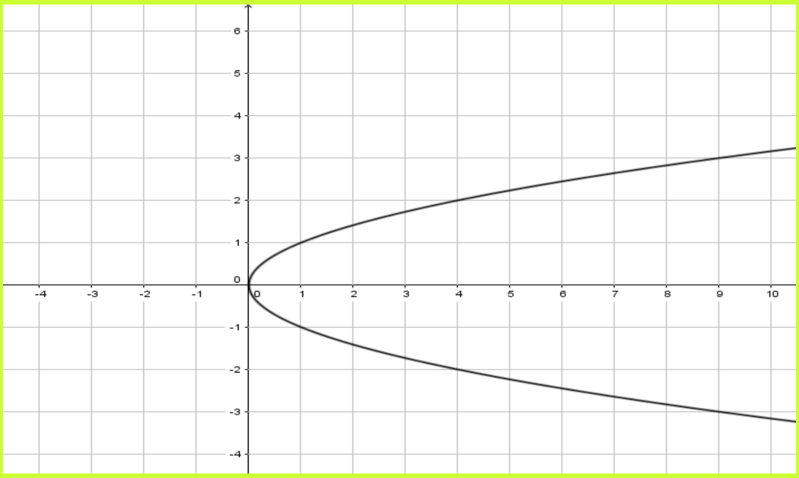



-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
2
1
-1
-2


-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6


-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4





Actividad 4

Observando el gráfico de la función g, que va de un conjunto A en $\mathbb{R}$, indicar:

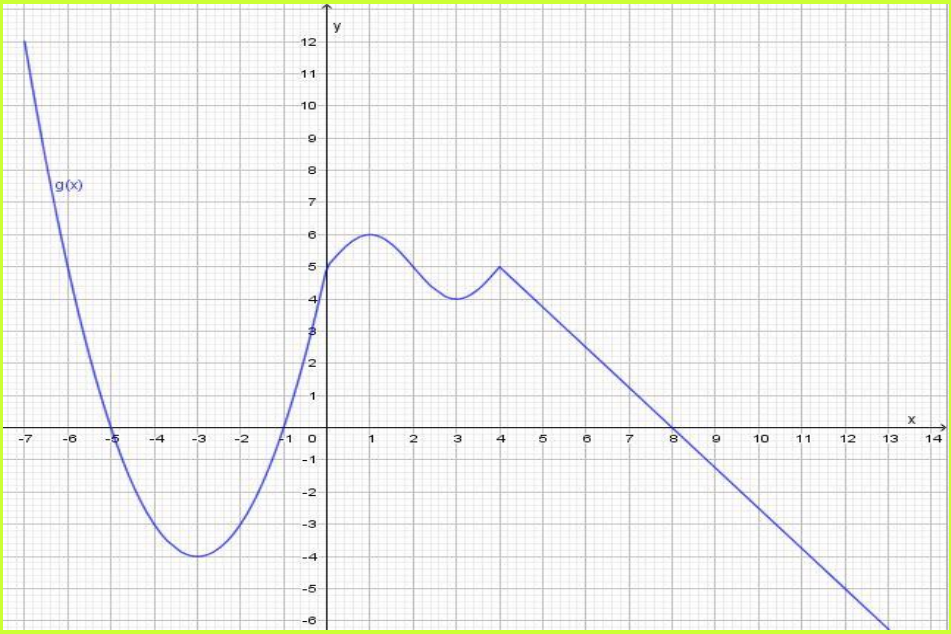
a) Dominio A y conjunto imagen

b) C^0, C^+ y C^-

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

d) Máximos y mínimos absolutos y relativos.

e) Calcular: g(0), g(-3), g(2), g(12), g(-6), g(1)



Actividad 5

Diego sacó agua de la heladera, la calentó hasta el hervor y quitó el recipiente del fuego. Midió la temperatura del agua desde que encendió el fuego hasta 64 minutos después. El siguiente es el gráfico de una función T que da las temperaturas (°C) del agua, registradas a lo largo del tiempo t (en minutos).

a) ¿Cuál es la temperatura al inicio del proceso?

b) ¿Cuál es el dominio e imagen de la función T? ¿Qué significan en términos del problema?

c) ¿En qué intervalos la función es creciente, decreciente o constante? ¿Qué significan estos intervalos en términos del problema?

d) ¿Cuáles son los máximos y mínimos absolutos de la función T? Interpretar en términos del problema.

e) Completar e interpretar en el contexto del problema:

T(5)=

T(20)=

T(55)=

Actividad 6

En la tienda de alimentos para mascotas están analizando si van a fraccionar o no las bolsas de 20 kg de comida para gatos.

a) Si se decide armar 5 paquetes con cada bolsa, ¿Cuántos kg contendrá cada uno? ¿Y si se decide armar 8 paquetes? ¿Y si fuesen 10, 12 o 40 paquetes?

b) La relación entre cantidad de paquetes a armar y kg que tendrá cada uno es una función. Explicar por qué.

c) Si se decide que la cantidad máxima de paquetes a armar será 20, ¿Cuál es el dominio e imagen de la función *p* en ese caso, siendo *x* la cantidad de paquetes? (considerar que se podría decidir no fraccionar la bolsa)

d) Determinar, si es posible, una fórmula para la función *p* que indique el peso (en kg) que contendrá cada paquete según la cantidad que se decida armar.

	Para leer luego de resolver las Actividades 3 a 6

Sobre la Actividad 6

Podemos afirmar que la relación entre cantidad de paquetes a armar y el peso (en kg) que tendrá cada uno es una función, puesto que por cada número de paquetes a armar le corresponderá una única cantidad de kg correspondiente al peso de cada paquete. Por ejemplo, si se arman 5 paquetes, cada uno contendrá 4 kg de alimento (esto surge de hacer 20:5). Y así podemos responder que si, en cambio, se deciden armar 8 paquetes, cada uno contendrá 2,5 kg de comida. Es fácil ver que a medida que aumente la cantidad de paquetes en los que se decida fraccionar la bolsa de 20 kg de alimento, disminuirá la cantidad de kg que tendrá cada uno de ellos; por lo tanto, se trata de una función decreciente.

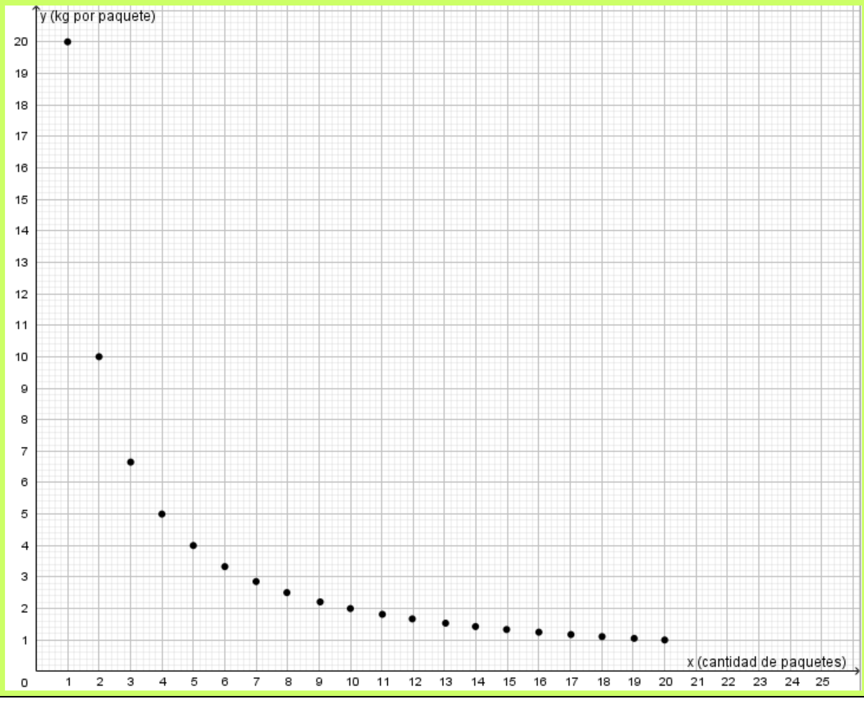
La cantidad de paquetes debe ser entera y positiva, ya que carece de lógica hablar de -3 paquetes o de 4,7 paquetes; además, sabemos que la cantidad máxima de paquetes a armar es 20 y que también se podría decidir no fraccionar. Entonces, el dominio de la función *p* son los números naturales del 1 al 20, y su imagen serán la cantidad de kg que pueden caber en cada paquete. Considerando que x es la cantidad de paquetes a armar, la imagen son los resultados de hacer el cálculo 20 dividido x, con x variando entre los números naturales de 1 a 20. A partir de esto, podemos determinar la fórmula de la función que indique los kg de alimento que contenga cada paquete dependiendo de cuántos se armen, dicha fórmula es: $p(x) = \frac{20}{x}$

Y así como para este problema se pudo encontrar una fórmula de la función que lo modeliza, se puede realizar en muchas situaciones más. De hecho, uno de los asuntos de la Matemática es modelizar diferentes fenómenos (naturales, económicos, sociales, etc), mediante funciones, de modo de poder estudiarlos. Conociendo la fórmula de una función es más sencillo, en muchos casos, predecir resultados a futuro, como así también determinar valores máximos y mínimos. Por ejemplo, si es posible determinar una fórmula que indique la temperatura de una ciudad determinada durante un mes, se podrá saber cuáles serán los días de máxima y mínima temperatura, y así un turista podría decidir qué actividades realizará en dicha ciudad en base a esa información.

Volviendo a la función de la Actividad 6, también se podrían calcular todos los resultados para cada cantidad de paquetes que se pueden armar y volcarlos en una tabla. Esa es otra forma de presentar una función. O también, como ya vimos con los problemas anteriores, se puede presentar su gráfico. En este caso, serán puntos aislados y no una gráfica de trazo continuo como en los problemas anteriores, puesto que, como ya se dijo, no tiene sentido hablar de 6,5 paquetes, sino solamente de una cantidad que sea representada por un número natural.

A continuación, se muestra la tabla y el gráfico que también representan a la función *p* (los valores del peso se presentan aproximados con dos decimales):

x (cantidad de paquetes)	**p(x) (kg que contiene cada paquete)**
1	20
2	10
3	6,67
4	5
5	4
6	3,33
7	2,86
8	2,5
9	2,22
10	2
11	1,82
12	1,67
13	1,54
14	1,43
15	1,33
16	1,25
17	1,18
18	1,11
19	1,05
20	1



Resolver la siguiente actividad

Actividad 7

Dar una función *f* (indicando dominio, codominio y fórmula) en cada uno de los siguientes casos, que represente a la situación. Determinar, además, el conjunto imagen.

a) f(x) es el precio a pagar de una persona según la cantidad x de alfajores comprados en un kiosco, sabiendo que cada alfajor vale $ 15 y que como máximo se llevará 6 alfajores.

b) f(x) es el perímetro de un cuadrado de lado x.

c) f(x) es el área de un cuadrado de lado x.

d) f(x) es la longitud de una circunferencia de radio x.

e) f(x) es el área de una circunferencia de radio x.

f) f(x) es el volumen de un cubo de arista x.

g) f(x) es el área de un triángulo rectángulo de catetos 2x y x+4.

Material extraído de *Matemática en Contexto*, de Carnelli, Cesaratto, Formica, Falsetti y Marino. Universidad Nacional de General Sarmiento (2011)

2 Áreas y Rompecabezas.

Para esta sección necesitamos recordar que:

- Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo interior recto (de 90^o).
- En todo triángulo rectángulo, los lados que determinan al ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto a dicho ángulo se llama hipotenusa.

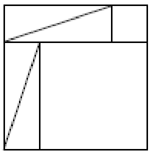
Considerar dos rompecabezas conformados con las siguientes piezas:

Primer rompecabezas: 4 triángulos rectángulos iguales y dos cuadrados. El lado de uno de los cuadrados es igual a uno de los catetos de un triángulo y el lado del otro cuadrado es igual al otro cateto del mismo triángulo.

Segundo rompecabezas: 4 triángulos rectángulos iguales (e iguales a los del rompecabezas anterior) y 1 cuadrado cuyo lado es igual a la hipotenusa de uno de los triángulos.

Ejercicio 1 Justificar que se pueden armar dos cuadrados iguales, uno con cada juego de piezas. Deducir que la suma de las áreas de los cuadrados que son piezas del ítem 1) es igual al área del cuadrado que es pieza del ítem 2)

Esperamos que el armado del primer rompecabezas haya quedado así:



En cada triángulo, llamamos a la medida de uno de los catetos, b a la del otro cateto y c a la de la hipotenusa. En primer lugar notemos que al enfrentar dos triángulos rectángulos haciendo coincidir sus hipotenusas se obtienen rectángulos cuyos lados miden a y b. Obtenemos dos de estos rectángulos. Luego el lado de medida a se ajusta con el cuadrado de igual lado y lo mismo se hace con el lado de medida b. La figura completa tiene ángulos rectos en cada una de sus esquinas y además sus lados miden todos la suma de los catetos $a + b$. Por eso es que la figura se trata de un cuadrado.

El área A del cuadrado resultante se puede calcular de dos maneras: a) mediante la medida de su lado, b) mediante la suma de las áreas de las figuras que lo componen. Analicemos lo necesario para estos cálculos:

- medida del lado del cuadrado resultante $L = a + b$,
- área de cada triángulo $= \frac{a \cdot b}{2}$,
- área de cuadrado de lado a $= a^2$,
- área de cuadrado de lado b $= b^2$.

Área del cuadrado mediante su lado:

$$A = (a + b)^2$$

Área del cuadrado por figuras que lo componen:

$A = 4\cdot$área de cada triángulo$+$área de cuadrado de lado a $+$área de cuadrado de lado b.

$$A = 4 \cdot \frac{ab}{2} + a^2 + b^2.$$

Por lo que resulta

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + a^2 + b^2.$$

Ejercicio 2. Hacer para el segundo rompecabezas un análisis similar al realizado para el primero. Llegar a que el área del cuadrado resultante puede calcularse con la expresión $4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$.

Dado que el área de los cuadrados de ambos rompecabezas es el mismo, porque la medida del lado en ambos casos es $a + b$, podemos igualar las áreas que resultan de sumar las figuras que los componen respectivamente obteniendo:

$$4 \cdot \frac{ab}{2} + a^2 + b^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2.$$

Cancelando los términos iguales en ambos miembros obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Este último renglón nos está mostrando una propiedad que se cumple para todo triángulo rectángulo. Esta propiedad puede enunciarse de dos modos diferentes.

Formulación mediante áreas: *En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa del triángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son, respectivamente, las longitudes de los catetos.*

Formulación mediante longitudes de lados del triángulo: *Dado un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de cada uno de los catetos.*

Ambas formulaciones corresponden al *Teorema de Pitágoras*, aunque la última es más conocida y nos permite hacer cálculos de longitudes de lados.

Teorema de Pitágoras: *Para todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Nota: Los cálculos de esta sección son de medidas, las cuales son positivas. De modo que expresiones del tipo $u^2 = v$, donde u es una medida y $v \geq 0$, se calculan $u = \sqrt{v}$.

Ejemplo 1. Si en un triángulo rectángulo, un cateto mide $a = 3$ cm y el otro cateto mide $b = 5$ cm, ¿cuánto mide su hipotenusa?

Considerando que ambas longitudes están expresadas en la misma unidad de medida (centímetros) podemos operar sólo con los números

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 3^2 + 5^2 \Longrightarrow c^2 = 9 + 25 = 34 \Longrightarrow c = \sqrt{34} \approx 5,83.$$

La hipotenusa mide entonces $c \approx 5,83$ cm.

Ejemplo 2. Si en un triángulo rectángulo, un cateto mide 3 cm y la hipotenusa mide 5 cm, ¿cuánto mide el otro cateto?

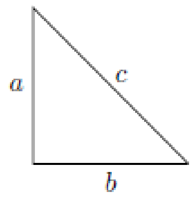
En este caso, llamando b al cateto que debemos averiguar resulta:

$$5^2 = 3^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow b = \sqrt{16} = 4.$$

El cateto mide $b = 4$ cm.

Ejemplo 3. Si en un triángulo rectángulo, los catetos miden 1 ¿Cuánto mide la hipotenusa? ¿Qué puede decir de los ángulos?

Este es un triángulo isósceles pues tiene dos lados iguales. Llamamos c a la medida de la hipotenusa, a a la medida de uno de los catetos y b a la medida del otro.



Usamos el Teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 1^2 + 1^2 \\ c^2 &= 2\,. \end{aligned}$$

Luego, $c = \sqrt{2}$.
De aquí podemos inferir una posible construcción geométrica de $\sqrt{2}$.

Ejemplo 4. Si en un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide el doble del otro y la hipotenusa mide 5 cm, calcule la medida de cada cateto.

Pongamos al cateto a como el doble de b, eso se escribe $a = 2b$ (podríamos haber supuesto que $b = 2a$ y los resultados finales darían lo mismo). La relación entre los lados del triángulo rectángulo según el Teorema de Pitágoras es:

$$5^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 5^2 = (2b)^2 + b^2 \Longrightarrow 5^2 = 4b^2 + b^2 = 5b^2.$$

Luego,

$$5^2 = 5b^2 \Longrightarrow \frac{5^2}{5} = b^2 \Longrightarrow 5 = b^2 \Longrightarrow b = \sqrt{5} \approx 2,236.$$

La longitud de la hipotenusa es aproximadamente 2,236 cm.

Ejemplo 5. Se apoya una escalera de 3 metros de largo en una pared (la pared es perpendicular al piso) ¿A qué distancia de la pared habría que apoyar la base de la escalera si se quiere alcanzar una altura de 2,30 m?

Se quiere saber a qué distancia de la pared hay que apoyar la escalera, para ello medimos a partir del canto de la pared (hacer un esquema). Como vemos, queda formado un triángulo rectángulo del que se conocen la hipotenusa, que es la medida de la escalera, y uno de los catetos, que es la altura que se desea alcanzar. Luego,

$$\begin{aligned}
c^2 &= b^2 + a^2 \\
3^2 &= 2,30^2 + a^2 \\
a^2 &= 3^2 - 2,30^2 \\
a^2 &= 3,71 \\
a &= \sqrt{3,71}, \\
a &\approx 1,92
\end{aligned}$$

Respuesta: La escalera debe colocarse a aproximadamente $1,92$ m de la pared para alcanzar la altura deseada.

Método para comprobar si una pared está a escuadra

En las construcciones edilicias es importante construir las paredes "a escuadra". Esto significa que cuando dos paredes se encuentran, el ángulo formado por ellas debe ser 90^o. Para verificar esto los constructores miden sobre las paredes apoyándose en el suelo. Desde el punto de encuentro de ambas paredes, donde ubican una marca, hacen otra marca a los 40 cm sobre una de ellas y otra a los 30 cm sobre la otra, todas al ras del suelo. Luego, con un hilo comprueban si entre las dos marcas sobre ambas paredes hay una distancia de 50cm.

¿Por qué este es un buen método de comprobación? ¡La razón la revela el Teorema de Pitágoras! pero... ¡usado al revés!
Observemos que si unimos las marcas podríamos imaginar segmentos que forman un triángulo tal que las medidas de sus lados verifican la siguiente igualdad numérica:

$$50^2 = 40^2 + 30^2$$

Dado que se cumple la igualdad de arriba entre las medidas de los lados del triángulo, podemos asegurar que el ángulo formado por los segmentos es recto y entonces las paredes están a escuadra.
La propiedad que usamos para asegurar esto es el recíproco del Teorema de Pitágoras (por eso dijimos "al revés"), el cual se enuncia en forma general del siguiente modo.
Teorema recíproco del Teorema de Pitágoras: *Si un triángulo es tal que la suma de los cuadrados de la longitud de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del tercero, entonces el ángulo comprendido por los dos primeros lados es recto.*

2 Proporciones en triángulos rectángulos.

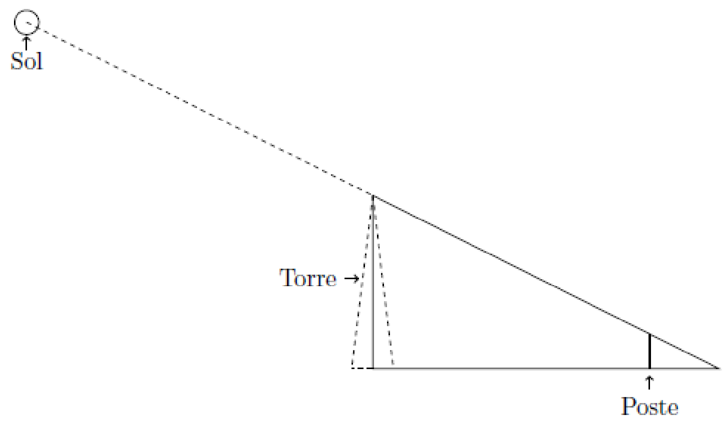
La altura de la torre eléctrica.

Ejemplo 9. Andando por las rutas argentinas habrán visto las torres gigantes que sostienen los cables de alta tensión que trasladan la energía eléctrica a nuestros hogares. Esas moles metálicas se ven tan tan altas...¿cuánto medirán?...A continuación mostraremos un método que nos permite estimar su altura.

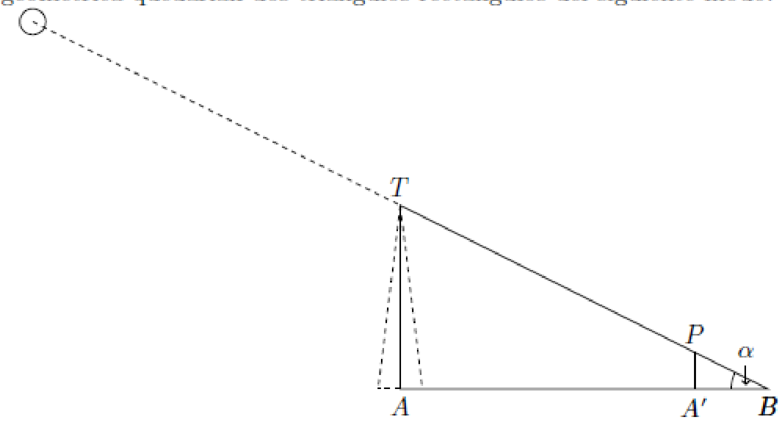
En un día soleado, en un momento determinado del día, es fácil ver la sombra de una torre sobre el terreno. Ésta se forma por un rayo de sol que incide en forma oblicua desde la punta de la torre hasta el terreno (hacer un dibujo de lo descripto). Pensemos la sombra de la torre como si fuera un segmento con origen en el punto A, en la base de la torre, y extremo B, en el final del rayo. Tomamos un poste cuya altura conocemos y lo ubicamos verticalmente en algún punto del segmento $\overline{AB}$ de modo que la nueva sombra del poste tenga el mismo extremo B.
El método para calcular la altura de la torre se basa en que dicha medida y la longitud de su sombra son valores *proporcionales* a la altura del poste y la longitud de su correspondiente sombra

$$\frac{\text{Altura de torre}}{\text{long. de sombra de torre}} = \frac{\text{Altura de poste}}{\text{long. de sombra de poste}}.$$

Las sombras, de la torre y del poste, imaginándolas como segmentos, y la altura del poste son relativamente fáciles de medir. A partir de la proporción de arriba se puede calcular la altura de la torre.
¿Qué condiciones son necesarias para poder aplicar este método? Para responder esta pregunta pensemos en qué se mantiene fijo y qué puede variar. (Mirar el dibujo y pensar antes de seguir leyendo...)



Fijado un cierto momento del día, la sombra de la torre y el ángulo de incidencia del rayo del sol en el punto B también están fijos. Llamamos α al ángulo. La altura del poste puede variar (dado que al poste lo elegimos nosotros) y al pedir que la sombra del poste termine en B estamos imponiendo la condición que el ángulo de incidencia del rayo solar que pasa por la cima del poste también sea α. Planteando la situación geométrica quedarían dos triángulos rectángulos del siguiente modo:



Notar que:

- Los triángulos rectángulos determinados, TAB y $PA'B$, tienen sus ángulos agudos iguales. Basta recordar que por propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, el ángulo agudo restante se calcula:

$$180^o - (90^o + \alpha) = 90^o - \alpha.$$

  El ángulo restante es el complemento de α. Esto puede ser generalizado para cualquier par de triángulos rectángulos, basta con que tengan un ángulo agudo igual para que los restantes sean iguales entre sí .

- Tomando como referencia el ángulo α en ambos triángulos, en el triángulo TAB el lado TA es opuesto α; en el triángulo $PA'B$ el lado PA' es el opuesto. Los lados AB y $A'B$ son lados adyacentes a α respectivamente y TB y PB son las hipotenusas de los respectivos triángulos considerados.

En los trìangulos rectángulos TAB y $PA'B$ estamos en condiciones de usar la siguiente propiedad que relaciona los lados de triángulos rectángulos.

Proporcionalidad entre lados de triángulos rectángulos: Si dos triángulos rectángulos cualesquiera tienen un ángulo agudo igual (miden lo mismo) entonces los pares de lados de ambos triángulos que guardan la misma posición respecto a dicho ángulo, son proporcionales.

Importante: La propiedad enunciada es la que corresponde a triángulos rectángulos *semejantes*. Esta propiedad vale en general para cualquier par de triángulos, sean o no rectángulos, cuando los mismos tienen sus ángulos respectivamente iguales. En este caso los llamamos triángulos semejantes. Podemos ver que éstos conservan la misma forma. Vale en general que en triángulos semejantes cualesquiera, los lados que guardan la misma posición respecto a ángulos iguales, son proporcionales.

La propiedad enunciada, aplicada a los triángulos considerados, nos permite armar la siguiente proporción:

$$\frac{TA}{AB} = \frac{PA'}{A'B} \tag{2.2}$$

de la cual podemos obtener la altura de la torre: $TA = \frac{PA'}{A'B} \cdot AB$ a partir de longitudes que podemos efectivamente medir.

La constante de proporcionalidad que resulta de lo planteado en (2.2) depende del ángulo de incidencia de los rayos solares, es decir de α. En otro momento del día podremos armar la proporción con las medidas de los segmentos determinados y el planteo de la proporción es análogo, pero la constante de proporcionalidad tendrá otro valor.

Ejemplo 10. Si el método anterior se aplica con un poste de 2m de alto el cual proyecta una sombra de $2,86$m y sabiendo que la sombra de la torre es de $78,54$m entonces:

$$\frac{\text{altura de torre}}{78,54} = \frac{2}{2,86} \Longrightarrow \text{altura de torre} = \frac{2}{2,86} \cdot 78,54. \Longrightarrow a_t = 54,92 \approx 55$$

En este ejemplo, la constante de proporcionalidad se obtiene del siguiente modo

$$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{2}{2,86} \approx 0,699.$$

2.1 Las relaciones trigonométricas.

Resolvimos la situación anterior gracias a la *proporcionalidad de lados de triángulos semejantes*. Esto nos permite obtener además otras constantes de proporcionalidad haciendo intervenir los distintos lados. Determinamos tres constantes de proporcionalidad entre lados de triángulos rectángulos semejantes. Éstas son tres de las principales *relaciones trigonométricas correspondientes a un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo.* Ellas son:

$$\text{coseno de } \alpha: \quad \cos\alpha = \frac{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa } \alpha}.$$

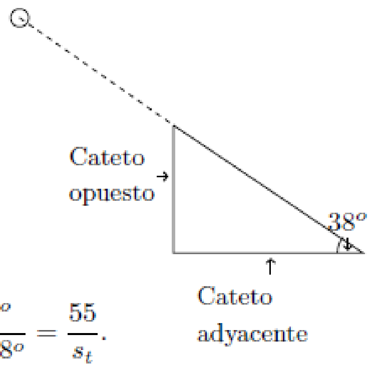
$$\text{seno de } \alpha: \quad \sin\alpha = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa } \alpha}.$$

Estos valores están tabulados para distintos ángulos agudos y pueden calcularse por calculadora.

Cabe aclarar que los valores resultantes de los cocientes planteados no tienen unidades de medidas (se dice que son *adimensionales*) pues las medidas que se consideran en dichas razones se obtienen cuando las cantidades están expresadas en la misma unidad de medición.

Ejemplo 11. (Cálculo de uno de los lados conociendo el ángulo o el valor de alguna relación trigonométrica):

- Si el ángulo de incidencia del rayo solar es de 38^o. ¿Cuál es la sombra que proyecta la torre de 55 m de alto?
  Hagamos un esquema de un triángulo rectángulo, observemos los datos y lo que queremos calcular.
  Vemos que los lados involucrados son el cateto opuesto (la altura de la torre) y el cateto adyacente (la longitud de la sombra), la relación que se usa es la tangente del ángulo. El planteo es:



$$\tan 38^o = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } 38^o}{\text{longitud de cateto adyacente a } 38^o} = \frac{55}{s_t}.$$

Para obtener el valor de $\tan 38^o$, usamos la calculadora científica. En primer lugar verificamos que el modo de la calculadora sea DEG, que corresponde a los grados sexagesimales con los que mediremos los ángulos. Al apretar la tecla de tangente (dependiendo de la calculadora puede ser tg o tan) y luego ingresar el número "38" se obtiene un número que aproximamos con cuatro cifras decimales:

$$\tan 38^o \approx 0,7812.$$

Se calcula sombra de torre $= \frac{55}{\tan 38^o}$. Este cociente se realiza en la calculadora ingresando el "55" dividido por "tan" "38"y vale sombra de torre $\approx 70,396$.

- ¿Cuál será la longitud del rayo incidente desde la cima de la torre anterior al suelo correspondiente a la inclinación 38^o?

En este caso, la relación que debemos usar es seno ya que conviene siempre usar los datos iniciales.

$$\sin 38^o = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } 38^o}{\text{longitud de hipotenusa}} = \frac{55}{\text{hip}} \Longrightarrow \text{hip} = \frac{55}{\sin 38^o}$$

Luego, la longitud del rayo incidente es hipotenusa $\approx 89,33$.

Ejemplo 12. (Cálculo del ángulo conociendo el valor de alguna de las relaciones trigonométricas) ¿Cuál es el ángulo de incidencia del rayo solar si para la torre de 55m se ha medido una sombra de 75m.?

En este caso conocemos las longitudes de los catetos con los que puede obtenerse la tangente del ángulo. Llamamos α al ángulo de incidencia, desconocido en este caso.

$$\tan \alpha = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha} = \frac{\text{altura de torre}}{\text{sombra de torre}} = \frac{55}{75}.$$

En este caso, para averiguar el ángulo agudo, usamos la calculadora: activamos la tecla de "inversa",luego la tecla "tan" de la tangente e ingresamos entre paréntesis el valor $(\frac{55}{75})$, (¡ojo!, dependiendo de la calculadora, los pasos pueden estar dados en otro orden) obteniendo el valor aproximado $36,25$. Este valor es la medida, en grados sexagesimales, del ángulo cuya tangente ingresamos. Para verlo en "grados, minutos y segundos sexagesimales", apretamos la tecla de conversión (explorar en la calculadora personal) que nos dará el siguente resultado: $\alpha \approx 36°15'$

Relación entre la tangente de un ángulo, el seno y el coseno.

Las definiciones introducidas en 2.1 y la simplificación de razones, nos permiten deducir que:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa}}}{\frac{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa}}} = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha} = \tan \alpha$$

Quiere decir que el valor de la tangente de un ángulo está relacionado con el del seno y el coseno del mismo.