CURSO DE INICIACIÓN

INSTITUTO SUPERIOR DEL PROFESORADO DR. JOAQUÍN V. GONZÁLEZ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – AÑO 2018

SEGUNDA ETAPA, PRESENCIAL

Material de estudio para ser trabajado en las clases presenciales, como parte de su preparación previa al inicio de las carreras del Profesorado de Educación Media en Matemática y/o del Profesorado de Educación Superior en Matemática. Este material es continuación del correspondiente

Autores:
Carnelli, Gustavo
Chávez, Carolina
Pesce, Carlos

EJE TEMÁTICO 1: NÚMEROS

En esta etapa, trabajaremos con los números racionales, en sus formas fraccionaria y decimal, y también con los números reales. Para un mejor aprovechamiento de las actividades, se sugiere no utilizar como recurso el pasaje a decimal de las fracciones dadas

La siguiente actividad es para trabajarse en grupos

Nota inicial:

Las fracciones son números que se escriben como ${}^{a}/_{b}$, donde *a* y *b* son números enteros y *b* es distinto de 0, llamados numerador y denominador, respectivamente. Una fracción es *irreducible* cuando está simplificada completamente, es decir, cuando el numerador y el denominador no tienen otro divisor positivo común que el 1. Por ejemplo, ${}^{4}/_{5}$ es una fracción irreducible, mientras que ${}^{4}/_{6}$ no lo es ya que tienen al 2 como divisor común; la fracción irreducible, equivalente a ella, es ${}^{2}/_{3}$.

Al conjunto formado por todas las fracciones lo llamamos conjunto de *números racionales*. Al efectuar la división del numerador por el denominador, el número queda expresado en su forma decimal. Por ejemplo, la expresión decimal de ${}^{12}/_{5}$ es 2,4.

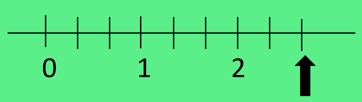
Actividad 1

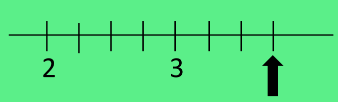
Resolver los siguientes ejercicios:

1) Representar en una misma recta numérica a las siguientes fracciones:

$$\frac{5}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{7}{6}, -\frac{9}{2}$$

2) ¿Qué fracción está indicada en cada caso?





3) En cada caso, completar las líneas punteadas con dos números enteros consecutivos entre los que la fracción quede comprendida.

a) $\ldots\ldots < \frac{33}{4} < \cdots ..$ b) $\ldots\ldots < \frac{11}{12} < \cdots ..$ c) $\ldots\ldots < -\frac{8}{7} < \cdots ..$

4) Ordenar de menor a mayor a los siguientes números racionales:

$$\frac{23}{2}, -\frac{8}{3}, \frac{23}{4}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{6}, -\frac{3}{7}, -1$$

5) ¿Cuántas fracciones hay entre 10 y 11? ¿Cuántas de ellas tienen denominador 3? ¿Y cuántas tienen denominador 12 y son irreducibles?

6) ¿Cuántas fracciones hay entre ${}^{2}/_{5}$ y ${}^{5}/_{8}$? Entre ellas, ¿hay alguna que sea irreducible y tenga denominador 8? ¿Y alguna que sea irreducible y tenga denominador 16? ¿Y alguna que tenga denominador 10?

7) ¿Cuántas fracciones hay entre ${}^{47}/_{100}$ y ${}^{48}/_{100}$ cuyo denominador es una potencia de 10? ¿Y cuántas hay entre ellas que tengan denominador 10?

8) Dar dos fracciones que estén entre ${}^{1}/_{4}$ y ${}^{1}/_{6}$. Luego, dar una que esté entre ellas y cuyo denominador sea 15

Para leer luego de haber realizado la actividad 1

Lectura 1: Pasaje de la expresión decimal a la expresión fraccionaria de un número racional

Cuando buscamos la expresión decimal correspondiente a una fracción puede darse que se obtenga un *desarrollo decimal finito*, como ${}^{3}/_{4} = 0{,}75$, o un *desarrollo decimal periódico*; en este último caso, el desarrollo periódico puede ser *puro* (toda la parte decimal es periódica), como en ${}^{7}/_{9} = 0{,}\hat{7}$ o *mixto* (el período no comienza en la primera cifra decimal), como en ${}^{5}/_{18} = 0{,}2\hat{7}$.

Los números con *expresión decimal finita* pueden escribirse como fracciones de la manera que se muestra en el ejemplo:

Consideremos al número *x = 2,427*.

Entonces:

$$1000.x = 1000\,.\,2{,}427$$

$$1000.x = 2427$$

$$x = \frac{2427}{1000}$$

(se multiplica por 1000 para transformar a 2,427 en un entero)

Los números con *expresión decimal periódica pura* pueden escribirse como fracciones de la forma que se muestra en el ejemplo:

Sea $x = 2,\widehat{17}$

Entonces:

$$100.x = 217,\widehat{17}\ \ (1)$$

Restando (2) – (1):

$$99.x = 215 \Rightarrow x = \frac{215}{99}$$

Si el número decimal es *periódico mixto*, la fracción se obtiene de la forma que se indica en el ejemplo:

Sea $x = 3{,}8\widehat{14}$

Entonces:

$$10.x = 38,\widehat{14}\ (1)$$

$$1000.x = 3814,\widehat{14}\ (2)$$

(observar que estas dos multiplicaciones permiten igualar las partes decimales)

Restando (2) – (1):

$$990.x = 3814 - 38 \Rightarrow x = \frac{3776}{990}$$

La siguiente actividad es para trabajarse en grupos, luego de la lectura 1

Actividad 2

Resolver los siguientes ejercicios:

1) Dar el desarrollo decimal de cada una de las siguientes fracciones:

$$\frac{11}{4}, \frac{5}{8}, \frac{23}{24}, \frac{82}{3}$$

2) Escribir en forma de fracción irreducible a los siguientes números decimales:

a) $0{,}47$ b) $3{,}142$ c) $0,\hat{8}$ d) $23,\hat{4}$ e) $1{,}3\widehat{86}$ f) $4{,}31\hat{6}$

3) Completar la siguiente tabla que vincula la expresión fraccionaria, decimal y porcentual de un mismo número.

Fracción	**Número decimal**	**Porcentaje**
$^{2}/_{5}$		
	0,45	
		12 %
		130 %
	1,2	
$7/4$		
$^{2}/_{3}$		

4) Dados los números racionales $1{,}291$ y $1{,}29\hat{1}$, dar un número racional que esté comprendido entre ellos. ¿Es posible dar algún otro más?

5) En cada caso, ordenar de menor a mayor a los siguientes números:

a) $1,\widehat{34}\ ;\ ^{4}/_{3}\,;1{,}3\hat{4}\ ;\ ^{13}/_{10}\,;^{75}/_{56}$

b) $3,\widehat{216};3{,}21\hat{6};3{,}2\widehat{16}$

c) $\frac{23}{7}$; $3{,}286$; $\frac{16}{5}$

d) $10^{-3}; 0{,}0014\ y\ 3.10^{-4}$

6) ¿Cuántos números hay entre …

a) 5 y 6, que sean racionales?

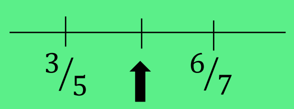
b) 5 y 500, que sean enteros?

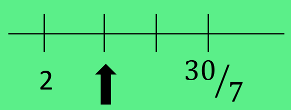
Realizar la siguiente actividad de tarea

Actividad 3

Resolver los siguientes ejercicios:

1) ¿Qué fracción está indicada en cada caso?





2) Dar una fracción irreducible que sea …

a) mayor que 5 y menor que 6

b) mayor que 8, menor que 9 y con denominador 4

2) Encontrar una fracción entre $^2/_7$ y $^{11}/_{15}$ cuyo denominador sea 5

3) ¿Hay alguna fracción positiva menor que $^2/_9$ cuyo denominador sea 4? ¿Y cuyo numerador sea 3? ¿Y cuyo denominador sea una potencia de 10?

4) En un curso de primer año de un profesorado de Matemática, las dos quintas partes viven a más de 5 km de la sede; de ellos, el 30 % debe alguna materia de la escuela media. ¿Qué fracción del curso vive a más de 5 km de la sede y no debe materias de la escuela media?

Para leer

Lectura 2: Potenciación con números reales

Recordamos aquí cómo se resuelven potenciaciones con exponente negativo y fraccionario.

Siendo *a* un número real y *n* un real positivo: $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

Ejemplo: $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$

Siendo *a* un número real no negativo y $^m/_n$ una fracción: $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Ejemplo: $4^{5/2} = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 32$

Y también recordamos algunas propiedades de la potenciación:

Siendo *a*, *m* y *n* reales (de modo que las operaciones estén definidas):

$$a^m . a^n = a^{m+n};\ a^m : a^n = a^{m-n};\ (a^m)^n = a^{m.n}$$

La siguiente actividad es para trabajarse en grupos, luego de la lectura 2

Actividad 4

Resolver los siguientes ejercicios:

1) Completar las líneas punteadas con “<”, “>” ó “=”, según corresponda:

a) $-\frac{1}{2} \ldots \ldots .. -\frac{3}{4}$

b) $-1 \ldots \ldots .. -\frac{8}{7}$

c) $\frac{77}{24} \ldots \ldots .. \frac{77}{23}$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} \ldots \ldots \ldots \left(\frac{4}{3}\right)^2$

e) $64^{3/2}$ ……… $64^{4/3}$ f) $\left[1-\frac{2}{3}.(-3)\right]^{-3}$ ……… $\frac{1}{26}$

2) Resolver los siguientes cálculos:

a) $\sqrt[3]{-1+\frac{26}{27}}-2.\left(\frac{3}{2}\right)^2$ b) $\frac{3^{-2}.\left(-\frac{1}{3}+1\right)^3}{(2^4)^{-1}.\ 3^{-3}}+9^{3/2}$

3) Decidir si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Justificar con precisión

a) Dado un número real cualquiera, su cuadrado es mayor o igual que él

b) Si al número 9 se lo multiplica por un real positivo cualquiera, se obtiene un número mayor o igual que 9.

c) Cualquiera sea el número real *a,* se cumple que: $\sqrt[3]{a^3}=a$

d) Cualquiera sea el número real *a,* se cumple que: $\sqrt{a^2}=a$

4) ¿Por qué cuando se definió lo que es una fracción se pidió que el denominador no sea 0?

5) Sabiendo que $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, x\geq y$, decir si las siguientes afirmaciones valen "para cualquier valor de *x* y de *y*", "para algunos valores de *x* y de *y*" o "para ningún valor de *x* ni de *y*". Justificar

a) $x+y\geq 0$ b) $\frac{x}{y}\geq 0$ c) $x^2\geq y^2$ d) $x-2\geq y-2$

e) $3x\geq 3y$ f) $-2x\leq -2y$ g) $-x>-y$ h) $x^5\geq y^5$

Realizar la siguiente actividad de tarea

Actividad 5

Resolver los siguientes ejercicios:

1) Considerando que: $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, x>0, y<0$: ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar

a) $x.y<0$ b) $\frac{x}{y^2}>0$ c) $x+y<0$ d) $x^3+y^2>0$

2) Decidir si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Justificar con precisión

a) Si un número real *a* es positivo entonces su inverso $1/a$ es menor o igual que él

b) $x\in\mathbb{R}$. Si $x<0$ entonces $-x>0$

3) Ordenar de menor a mayor a los números $a, -a$ y a^2, para cada valor real de *a*.

EJE TEMÁTICO 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES

En esta segunda etapa, nos ocuparemos de la resolución de ecuaciones de grado 2 y de grado 3 o más

Para leer

Lectura 1: Recordatorio de resultados sobre ecuaciones cuadráticas

Una *ecuación cuadrática* es aquella que puede escribirse como

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

siendo $a \in \mathbb{R} - \{0\}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

Las soluciones (o ceros o raíces) de una ecuación cuadrática pueden obtenerse mediante la fórmula[1]:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número $b^2 - 4ac$ es el *discriminante* de la ecuación y permite conocer cuántas soluciones reales tiene la ecuación. Se lo simboliza con la letra griega delta mayúscula.

- Si $\Delta > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas (ya que puede calcularse la raíz cuadrada de Δ, ésta no dará 0 y la fórmula dará dos resultados distintos);

- Si $\Delta = 0$ entonces la ecuación tiene una única solución real (ya que la raíz cuadrada de Δ da 0 y así, la fórmula dará dos resultados iguales);

- Si $\Delta < 0$ entonces la ecuación no tiene soluciones reales (ya que no puede calcularse la raíz cuadrada de Δ en el conjunto de los reales).

Si la ecuación tiene raíces reales, puede expresarse como producto de sus raíces. Llamando a éstas x_1 y x_2:

$$a.x^2 + b.x + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

Si $x_1 = x_2$, es decir, si el discriminante de la ecuación es 0, resulta:

$$a.x^2 + b.x + c = a.(x - x_1)^2$$

Como el factor $(x - x_1)$ aparece dos veces, decimos que x_1 es una *raíz doble*.

[1] Omitimos demostrar la validez de la fórmula. Probablemente sea vista en alguna de las asignaturas de primer año

Realizar la siguiente actividad luego de la Lectura 1

Actividad 1:

1) Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $3x^2 - \frac{1}{3} = 0$ b) $2 - x^2 = -1$ c) $4x^2 - 2x = 0$

d) $-x.(2 - x) = -2x - 1$ f) $-x^2 + x + 6 = 0$ g) $4x^2 + 3x + 1 = 0$

2) Resolver de dos modos diferentes a las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(4 - 2x)^2 = \frac{1}{4}$ b) $-2x.(5 - x) = 0$

Actividad 2:

1) Hallar la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 12 cm.

2) ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero de lado 3 cm?

3) ¿Cuál es el valor exacto del radio de un círculo de área 5 cm^2?

Actividad 3:

1) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

a) $-\sqrt{2}$ es solución de la ecuación $2 - x^2 = 0$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es la única solución de la ecuación $-x^2 + 4 = \frac{9}{2}$

c) Todas las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones reales distintas

d) Si una ecuación cuadrática tiene el discriminante mayor o igual que 0 entonces tiene dos soluciones reales distintas

e) Si en una ecuación cuadrática el término independiente vale 0, entonces una solución es el 0

f) Si una ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales, entonces una es positiva y la otra es negativa

g) Si una ecuación cuadrática tiene los tres coeficientes mayores que 0 entonces no tiene raíces reales

Para leer luego haber resuelto las Actividades 1 a 3

Lectura 2: Resolución de ecuaciones de grado mayor o igual que 3

En este apartado vamos a avanzar, de forma preliminar, en la resolución de ecuaciones de grado 3 o más.

Veamos una presentación del problema. Supongamos que queremos resolver la ecuación

$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0$$

En principio, no disponemos de recursos para encontrar los valores de *x* que verifican la ecuación. Pero, si supiéramos que la ecuación dada puede ser expresada de la siguiente manera:

$$(x-2).(x+1).\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$$

(puede verificarse aplicando la propiedad distributiva que las expresiones son equivalentes)

podríamos resolver la ecuación usando que un producto es nulo cuando alguno de los factores es nulo. Así:

$$x-2=0 \text{ ó } x+1=0 \text{ ó } x-\frac{3}{2}=0$$

De lo que se deduce que:

$$x=2 \text{ ó } x=-1 \text{ ó } x=\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $S=\left\{2,-1,\frac{3}{2}\right\}$

Con el ejemplo anterior, pretendemos hacer ver que si un polinomio está expresado como producto[2], la resolución de la ecuación se facilita. Veremos ahora, algunos recursos que permiten avanzar en esa dirección.

Como un primer acercamiento, consideremos las siguientes propiedades:

• $a^2-b^2=(a-b).(a+b)$; al primer miembro de la igualdad se lo llama *diferencia de cuadrados*;

• $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$; al primer miembro de la igualdad se lo llama *cuadrado de un binomio*;

• $(a+b)^3=a^3+3.a^2.b+3.a.b^2+b^3$; al primer miembro de la igualdad se lo llama *cubo de un binomio*.

Ejemplo de su uso:

La ecuación $x^4-2x^2+1=0$ puede escribirse como $(x^2-1)^2=0$

Entonces: $x^2-1=0$, es decir $x=1$ ó $x=-1$. Luego, $S=\{-1,1\}$

Y también, el uso del factor común, como en los siguientes dos ejemplos:

La ecuación $x^3-x=0$ puede escribirse como $x.(x^2-1)=0$, luego $S=\{0,-1,1\}$

La ecuación $x^3-x^2-4x+4=0$ puede escribirse como $x^2.(x-1)-4.(x-1)=0$, es decir: $(x-1).(x^2-4)=0$. Luego $S=\{1,-2,2\}$

Otro recurso más general es el que se apoya en lo que desarrollamos a continuación:

[2] No usamos el término *factorizado* ya que esto es más complejo y será desarrollado en la asignatura Álgebra I

Si realizamos la división entre los polinomios $P(x)$ y $x-a$, obtenemos un polinomio cociente $Q(x)$ y polinomio resto $R(x)$, que es una constante (debido a que el divisor tiene grado 1) y podemos escribir que:

$$P(x) = Q(x).(x-a) + R(x)$$

Evaluando la igualdad anterior en $x = a$, resulta:

$$P(a) = Q(a).(a-a) + R(a)$$

Operando:

$$P(a) = R(a)$$

Analicemos lo obtenido. Hemos llegado a que el polinomio dado (el dividendo de la división) evaluado en $x = a$, coincide con el resto evaluado en $x = a$; pero como el resto es una constante, podemos decir directamente que el polinomio evaluado en $x = a$ es el resto de la división.

Este resultado se conoce como *teorema del resto*. Es importante destacar que esto vale porque el divisor es de la forma $x = a$, lo que permite decir que el resto es una constante[3].

Podemos decir algo más aún. Si el resto de la división (que es una constante) es cero, eso quiere decir que $P(a) = 0$ y que puede escribirse directamente que $P(x) = Q(x).(x-a)$, lo que significa que $P(x)$ es divisible por $x-a$.

Ejemplos:

Dado $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x + 3$, el resto de la división $P(x) : Q(x)$ es $P(-3)$, es decir: $P(-3) = (-3)^3 - 2.(-3) + 1 = -27 + 6 + 1 = -20$

Dado $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x - 1$, el resto de la división $P(x) : Q(x)$ es $P(1)$, es decir: $P(1) = 1^3 - 2.(1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, lo que quiere decir que el polinomio $P(x)$ es divisible por $x-1$ y, entonces, podemos escribir que:

$$x^3 - 2x + 1 = C(x).(x-1)$$

Esta igualdad es importante con vistas a nuestro interés de resolver ecuaciones.

El polinomio $C(x)$ es el cociente de la división de $P(x)$ por $x-1$, por lo que tiene grado 2. Así, hemos expresado al polinomio $P(x)$ como producto de un polinomio de grado 2 y otro de grado 1.

Aprovechemos el ejemplo para cerrar esta idea. Pensemos en resolver la ecuación

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

[3] No analizamos aquí el caso en que el divisor es un polinomio de grado 1 con el coeficiente principal distinto de 1

Sabemos que $x^3 - 2x + 1$ es divisible por $x - 1$. Buscamos el cociente de la división de estos dos polinomios (lo hacemos con la regla de Ruffini):

	1	0	–2	1
1		1	1	–1
	1	1	–1	0

Luego:

$$(x^2 + x + 1)\,.\,(x - 1) = 0$$

Entonces:

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ ó } x - 1 = 0$$

El discriminante de la ecuación cuadrática es $\Delta = 1 - 4.1.1 = -3 < 0$ por lo que la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales. Luego, la única solución real de la ecuación es $x = 1$.

El método mostrado en el ejemplo anterior se apoya en que conocíamos una solución de la ecuación. Vamos a ver ahora una propiedad que aporta en este asunto. A esta propiedad se la llama *teorema de Gauss*[4] y trata sobre lo siguiente:

Si un polinomio que tiene todos los coeficientes enteros tiene alguna raíz *racional*, ésta es el cociente entre alguno de los divisores del término independiente y alguno de los divisores del coeficiente principal.

Veamos un ejemplo:

Consideremos la ecuación $2x^3 - 6x^2 - 12x + 16 = 0$

Aplicando el teorema de Gauss, los divisores de 16 son: 1, –1, 2, –2, 4, –4, 8, –8, 16, –16 y los divisores de 2 son: 1, –1, 2, –2

Los posibles cocientes son:

$$\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{4}{1}, \frac{-4}{1}, \frac{8}{1}, \frac{-8}{1}, \frac{16}{1}, \frac{-16}{1}$$

$$\frac{1}{-1}, \frac{-1}{-1}, \frac{2}{-1}, \frac{4}{-1}, \frac{-4}{-1}, \frac{8}{-1}, \frac{-8}{-1}, \frac{16}{-1}, \frac{-16}{-1}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{8}{2}, \frac{-8}{2}, \frac{16}{2}, \frac{-16}{2}$$

$$\frac{1}{-2}, \frac{-1}{-2}, \frac{2}{-2}, \frac{4}{-2}, \frac{-4}{-2}, \frac{8}{-2}, \frac{-8}{-2}, \frac{16}{-2}, \frac{-16}{-2}$$

[4] Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) fue uno de los matemáticos más destacados de la historia.La demostración de esta propiedad es asunto de la asignatura Álgebra I

Varios de estos cocientes son iguales, por lo que si el polinomio $p(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$ tiene alguna raíz racional, será alguna de éstas:

$$1, -1, 2, -2, 4, -4, 8 - 8, 16, -16, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

Podemos ver que $x = 1$ es una raíz. Con esto, efectuamos la división entre el polinomio dado y $x - 1$

	2	–6	–12	16
1		2	–4	–16
	2	–4	–16	0

Luego:

$$(2x^2 - 4x - 16) \, . \, (x - 1) = 0$$

Entonces:

$$2x^2 - 4x - 16 = 0 \text{ ó } x - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula resolvente a la cuadrática, se obtiene $x = -2$ ó $x = 4$

Luego, el conjunto solución de la ecuación dada es: $S = \{1, -2, 4\}$

Vale aclarar que si hubiéramos seguido probando con los valores de la lista de posibles raíces racionales, hubiéramos encontrado a las tres raíces. Sin embargo, hay que tener en cuenta dos cosas: podría ser que el polinomio tuviera raíces irracionales (y éstas no son proporcionadas por el teorema de Gauss); además, no tenemos ningún elemento teórico aún, que nos precise cuántas raíces tiene un polinomio.

	Realizar la siguiente actividad luego de la Lectura 2

Actividad 4:

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - x^3 = 0$ b) $x^4 - x = 0$ c) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$

d) $-2x^3 - x^2 + 3x + \frac{3}{2} = 0$ e) $x^3 + 2x - 3 = 0$ f) $2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

2) Resolver la siguiente ecuación de tres maneras distintas: $x^2 + 9 - 6x = 0$

3) ¿Es posible aplicar el teorema de Gauss para buscar las raíces del polinomio $p(x) = \frac{1}{2}x^3 - x + 4$?

EJE TEMÁTICO 3: ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

Sobre Geometría, en esta segunda etapa, trabajamos con el perímetro y el área de figuras planas y el volumen de cuerpos geométricos

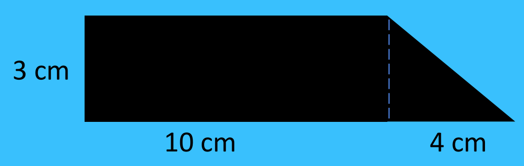
Realizar las siguientes actividades

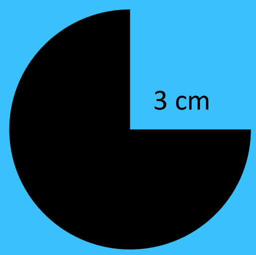
Actividad 1

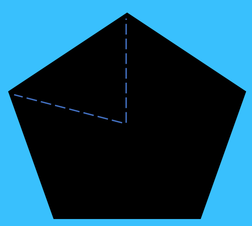
1) Un rectángulo tiene base de *b* cm y su altura es el doble de la base. En términos de *b*, ¿cuál es el perímetro y cuál es el área del rectángulo?

2) Averiguar las medidas de una hoja A4 y una hoja A5 y ver si es cierto que la superficie de una hoja A4 es el doble de la de una hoja A5

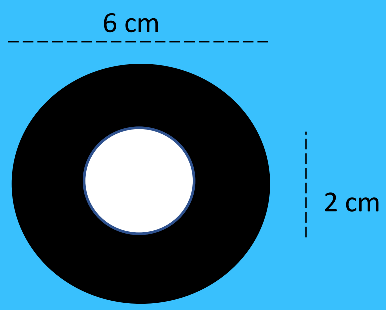
3) Calcular el perímetro y el área de las siguientes figuras:



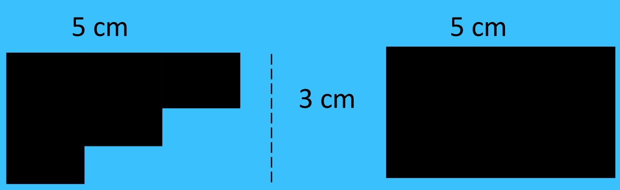




Son 5 triángulos
equiláteros de lado 3 cm



4) Comparar el área y el perímetro del siguiente par de figuras:



5) Si dos figuras tienen igual perímetro, ¿es cierto que también tienen igual área?

6) Si dos figuras tienen igual área, ¿es cierto que también tienen igual perímetro?

Actividad 2:

1) Un envase de cartón de leche tiene una base de 10 cm por 5 cm y una altura de 20 cm.

a) ¿Cuál es el volumen del envase?

b) Si otro envase de cartón tiene duplicadas las tres dimensiones respecto del cartón de leche, ¿qué relación tienen los volúmenes de ambos envases?

2) Con una lámina cuadrada de 30 cm se construye una caja, recortando cuadrados iguales en las esquinas. Comparar el volumen de la caja que se obtiene cuando los cuadrados que se recortan son de lado …

a) 1 cm b) 5 cm c) 10 cm

3) ¿Cuánto mide la diagonal de un paralelepípedo recto de dimensiones 3 cm, 4 cm y 5 cm? (un paralelepípedo recto el cuerpo geométrico que modeliza a una caja de base rectangular)

4) Un barril cilíndrico sin tapa, de 30 cm de radio en la base y 1 m de altura se llena con agua.

a) ¿Cuántos litros de agua llenan el tanque?

b) ¿Cuántos metros cuadrados de material se necesitan para construir el barril?

EJE TEMÁTICO 4: FUNCIONES

En esta segunda etapa, veremos dos tipos funciones que están entre las llamadas *funciones elementales* y que tienen muchas aplicaciones concretas: son la función lineal y la función cuadrática

Resolver la siguiente actividad

Actividad 1

Bárbara acaba de sacar el registro para conducir y se va en auto, con una prima, a visitar a unos tíos en Paraná. La distancia de Buenos Aires a Paraná es 500 km. Su madre, un poco preocupada, le pide que llame, para ver cómo va todo, cuando estén a mitad del viaje, cuando esté a 365 km de Buenos Aires y cuando llegue a Paraná. Para dejarla tranquila, Bárbara quiere decirle exactamente los horarios en que llamará. Y como es novata, decide viajar a velocidad constante. Va a salir de la casa de su prima en Escobar, distante 50 km de Buenos Aires, a las 8 de la mañana y sabe que dos horas más tarde se encontrará a 230 km de Buenos Aires. ¿En qué horarios llamará Bárbara a su madre?

Para leer luego de haber resuelto la Actividad 1

Sobre la Actividad 1

Para que Bárbara pueda decirle a su mamá en qué horarios[5] llamará, podemos pensar en el siguiente esquema:

Pero primero, tenemos que saber a qué velocidad constante viajará Bárbara. Como sabemos que tarda dos horas en ir del km 50 al km 230, podemos deducir que en dos horas recorrerá 180 km (230–50) y, como la velocidad es constante, en una hora recorre 90 km.

También, se podía calcular esto recordando lo que se estudia en Física, con el MRU (movimiento rectilíneo uniforme):

$$Velocidad = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ empleado}$$

[5] Suponiendo que no se detiene en ningún momento del viaje, aunque sabemos que en la práctica es posible que lo haga para cargar combustible, por ejemplo, vamos a imaginar que si para tarda tan poco que consideramos esa demora despreciable. En rigor, Bárbara podrá darle horarios aproximados a su mamá acerca de cuándo realizará los llamados que ella le pide.

$$Velocidad = \frac{180\ km}{2\ h} = 90\ km/h$$

Teniendo en cuenta estos datos, necesitamos ahora poder encontrar una fórmula que le permita a Bárbara calcular la distancia a Buenos Aires (d) en cada instante, medido en horas (x). Esto es una función *d*, puesto que a cada hora le corresponde una única distancia a Bs. As. Podemos ayudarnos, analizando qué sucede para algunos valores mediante una tabla:

Tiempo de viaje (en h) **x**	**Distancia a Bs. As. (km)** **d**
1	50 + 90.1 = 140
2	50 +90.2 = 230
3	50 + 90.3 = 320

Como se ve en la tabla, la distancia a Buenos Aires se obtiene multiplicando la velocidad por la cantidad de horas de viaje y sumándole la distancia al punto de partida. Por lo tanto, la fórmula de la función *d* queda así: **d(x)=90.x + 50**

El dominio representa la cantidad de horas de viaje, pero no sabemos cuánto tardará en llegar a Paraná, por lo que podemos decir, inicialmente, que son números reales positivos y el cero, ya que el tiempo es continuo y positivo, o es cero en el momento de inicio del viaje. Podemos averiguar a qué hora (x) llega a Paraná sabiendo que, en ese momento, la distancia será 500 km; por lo tanto, d(x)=500. Es decir:

$90x + 50 = 500 \rightarrow 90x\ = 500 - 50\ \ \rightarrow\ x =\ 450/90\ \ \rightarrow$ **x= 5 horas**

Ahora sí, podemos decir que el dominio de la función *d* es el intervalo real de 0 a 5, es decir, $Dom\ d = [0; 5]$.

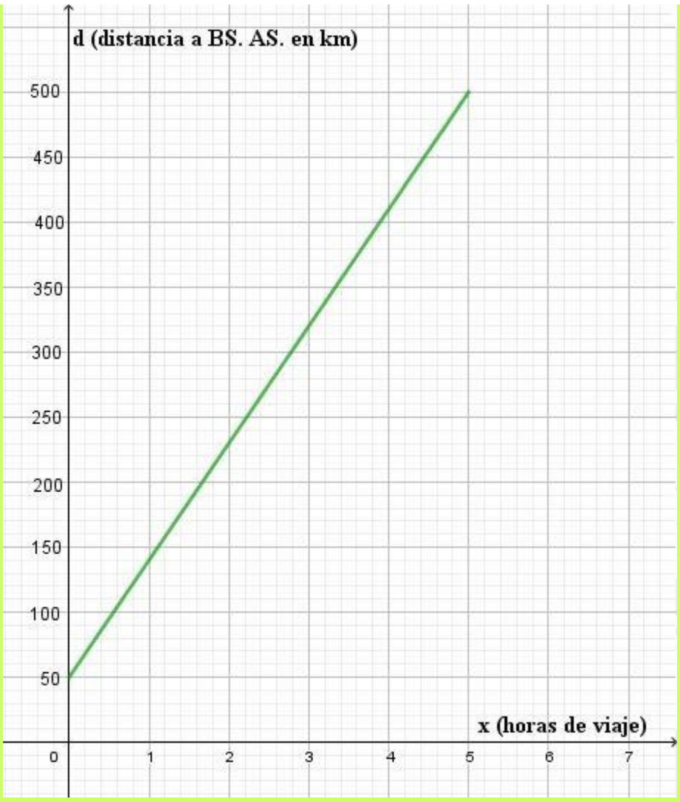
Vemos que el cálculo 90.x nos da la cantidad de km recorridos por Bárbara en *x* horas de viaje y debemos sumarle 50 para saber a qué distancia de Buenos Aires está.

Funciones del estilo de la que formulamos para este problema, se conocen como *funciones lineales*.

Una función lineal tiene una fórmula del tipo *f(x) = mx + b*, donde *m* y *b* son números reales cualesquiera y *x* es la variable independiente.

En nuestro caso, *m* es la velocidad constante a la que viaja Bárbara, es decir $m = 90$ y *b* es el kilometraje desde donde partió, es decir $b = 50$.

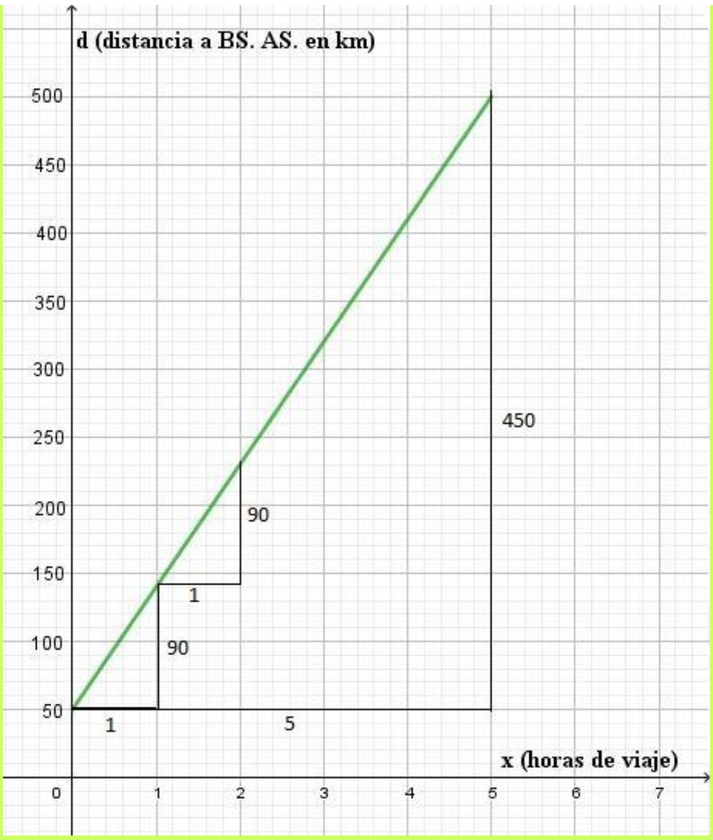
Llevemos a un gráfico los datos de la tabla anterior, completando con las horas hasta 5, para ver qué características tiene la representación de este tipo de función.



Vemos que los puntos quedan alineados formando, en este caso, un segmento; pero, si el problema admitiera cualquier valor de la variable independiente, tendríamos una ***recta***, puesto que no habría límite o tope para los valores del dominio ni del conjunto imagen.

Pero ¿por qué los puntos del gráfico quedan alineados? Porque el valor de la velocidad a la que viaja Bárbara significa que, por cada hora de viaje, es decir, por cada unidad de la variable independiente, aumenta 90 km en su recorrido, esto es, que aumenta 90 unidades la variable dependiente. Y esta variación se mantiene constante a lo largo de todo el problema. A dicha variación constante se la llama ***pendiente de la recta*** (que representa a la función lineal) y podemos decir entonces que es el cociente entre la variación de la variable dependiente y la variación de la variable independiente, es decir: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Esto lo podemos observar, también, en el gráfico de la función lineal que modeliza la situación. Vemos que es cierto que por cada unidad que aumenta la variable x, aumenta 90 unidades la variable dependiente. Pero también vemos que este aumento se da en forma proporcional cuando hacemos una variación mayor en la variable independiente, como se observa en el gráfico donde al aumentar 5 horas de viaje, el recorrido aumenta en 450 km y, aplicando estos valores a la fórmula de la pendiente m, tenemos que: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{450km}{5h} = 90\,\frac{km}{h}$



El valor de *b* es 50, que es la distancia a Buenos Aires desde donde parte Bárbara, es decir, el kilometraje en el que se encuentra en el instante cero. A este valor de la variable dependiente (que se ubica sobre el eje de ordenadas) se lo conoce como *ordenada al origen*. Por lo tanto, cuando se tiene una función lineal del tipo $f(x) = mx + b$, ya se sabe cuál es la intersección de la recta con el eje vertical. Y con el valor de *m,* sabremos cuánto cambia la variable dependiente en función de cada aumento de la variable dependiente.

Algo importante a tener en cuenta es que el valor de la pendiente puede ser negativo y esto quiere decir que la variable dependiente disminuye con cada aumento de la variable independiente. Esto podría suceder si pensamos en un auto que esté viniendo desde Paraná a Buenos Aires (o desde cualquier otro lugar que sea en sentido contrario a la ruta de Bárbara), ya que en ese caso consideramos la velocidad negativa y el gráfico sería una recta decreciente.

Resumiendo:

Una función lineal tiene una fórmula del tipo $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$ cuya gráfica es una recta, donde *m* representa la *pendiente* y *b* es la *ordenada al origen*, es decir el corte de la gráfica con el eje y cuyo punto tiene coordenadas $(0; b)$. La pendiente indica la variación de los valores de la imagen, respecto de la variación de los valores del dominio, o sea que: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Pero aún queda responder a la pregunta del problema: ¿En qué horarios llamará Bárbara a su madre para que se quede tranquila?

Ya sabemos que tardará 5 horas en llegar a destino; por lo tanto, el último llamado será a las 13 horas, puesto que sabíamos que salió a las 8 horas. Pero falta responder cuándo hará los demás llamados.

La madre de Bárbara le pide que la llame cuando estén a mitad de viaje. Para averiguar cuándo será esto podemos pensar de dos maneras: por un lado, ya sabemos que el viaje total le llevará 5 horas, por lo que debería llamar a las 2 horas y media de haber empezado el viaje, es decir, a las 10:30 h. Pero si no hubiésemos averiguado el total de horas de viaje, podríamos haber pensado así: primero averiguar cuántos km recorrerá una vez que haya buscado a su prima, y eso es 450 km. Como va a velocidad constante, entonces la mitad del viaje se da cuando haya recorrido 225 km; por lo tanto, Bárbara debe hallar en qué momento recorrerá esa cantidad de km, es decir que debe resolver la siguiente ecuación: $90x = 225$ luego $x = 225/90$, es decir x=2,5h.

El segundo llamado lo tiene que hacer cuando se encuentre a 365 km de Buenos Aires; entonces, para hallar la cantidad de horas, conviene pensar en la función lineal que modeliza la situación e igualar esta fórmula a 365, luego:

$$90x + 50 = 365 \Longrightarrow x = \frac{365 - 50}{90} \Longrightarrow x = 3{,}5$$

O sea, que el segundo llamado debe hacerlo cuando haya hecho 3,5 horas de viaje, es decir, a las 11:30 h.

Resolver la siguiente actividad

Actividad 2

Teniendo en cuenta la función lineal cuya fórmula es $\boldsymbol{f(x) = 90x + 50}$, planteada en el problema anterior, graficarla tomando como dominio todos los números reales y analizar diferentes formas de hacerlo. Luego, hacer lo mismo con las funciones de expresiones $\boldsymbol{g(x) = -\frac{2}{3}x + 6}$, $\boldsymbol{h(x) = -4x - 1}$ y $\boldsymbol{t(x) = 3}$ **.**

Sacar conclusiones acerca de la relación entre el valor de la pendiente de una recta que representa una función lineal respecto del crecimiento o decrecimiento de la misma.

Para leer luego de haber resuelto la Actividad 2

Sobre la Actividad 2

Si consideramos la función lineal de fórmula $\boldsymbol{f(x) = 90x + 50}$ con su dominio más amplio, es decir $\mathbb{R}$, la gráfica es una recta y no un segmento, tal como habíamos reflexionado anteriormente.

Para graficar cualquier recta, alcanza con conocer dos de sus puntos. Éstos pueden ser dos cualesquiera que podemos encontrar mediante una tabla de valores, es decir, reemplazando en la variable x

(independiente) por dos valores del dominio para encontrar sus correspondientes imágenes (valores de y, variable dependiente). Estos podrían ser, por ejemplo: $(1; 140)$ y $(2; 230)$. Pero también podríamos hallar puntos característicos de las funciones, como lo son la raíz y la ordenada al origen de la función.

Recordemos que las raíces de una función son las intersecciones con el eje de abscisas, pero que en el caso de una recta (no horizontal) puede tener como mucho un solo corte con dicho eje.

La raíz es el punto de la función en el cual la ordenada vale cero, es decir es del tipo (r; 0), por lo tanto, para encontrar la raíz de la recta que estamos analizando tendremos que igualar a cero la fórmula de la función.

Luego: $f(x) = 0 \Longrightarrow \; 90x + 50 = 0 \; \Longrightarrow x = \frac{-50}{90} \quad \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -\frac{5}{9}}} = -0,\hat{5}.$

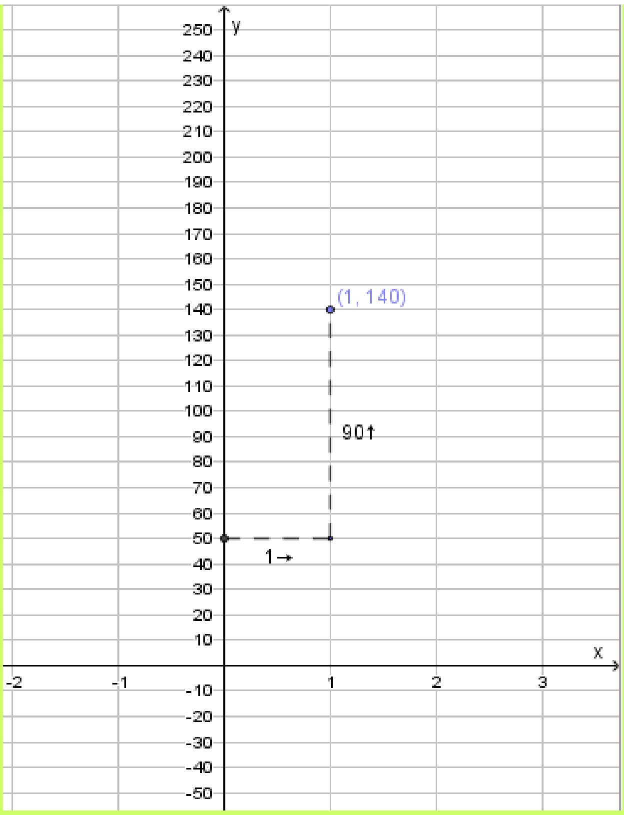
Entonces, el punto de intersección con el eje de abscisas es $\left(-\frac{5}{9}; 0\right)$

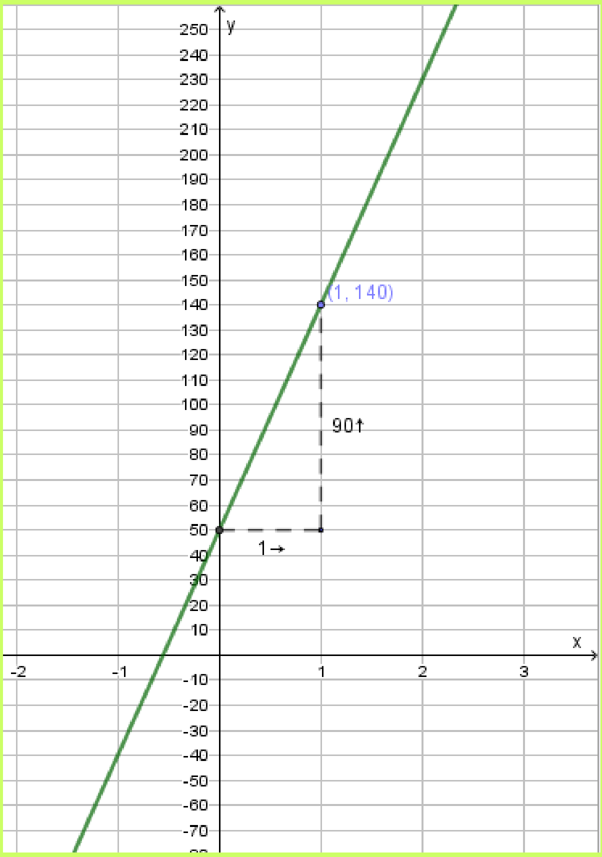
La ordenada al origen, tal como se dijo antes, es la intersección con el eje y, y basta con reemplazar la variable independiente por cero o, en el caso de la función lineal, ver el valor de b. En nuestro caso, tal como vimos, es 50. Por lo tanto, el punto de intersección con el eje de ordenadas es: $(0; 50)$.

Así, marcando en el plano cartesiano los dos puntos que mencionamos, $(1; 140)$ y $(2; 230)$, que son las intersecciones con los ejes, podemos trazar la recta que representa a la función lineal $f(x) = \; 90x + 50$.

Veamos en el siguiente gráfico que efectivamente la recta contiene a esos cuatro puntos.

También podemos graficar teniendo en cuenta la pendiente, puesto que ésta indica la variación de la variable dependiente respecto de la variable independiente. Como la pendiente $m = 90$, podemos pensar que es $\frac{90}{1}$, es decir que por cada unidad que aumenta la variable x, aumentará 90 unidades la variable y. Entonces si nos posicionamos en un punto conocido de la recta, por ejemplo, la ordenada al origen y desde ahí aumentamos una unidad a la derecha (es decir sobre x) y 90 unidades hacia arriba (es decir sobre y}, obtenemos otro punto de la recta.





Observando el gráfico, también podemos afirmar que se trata de una función creciente y que

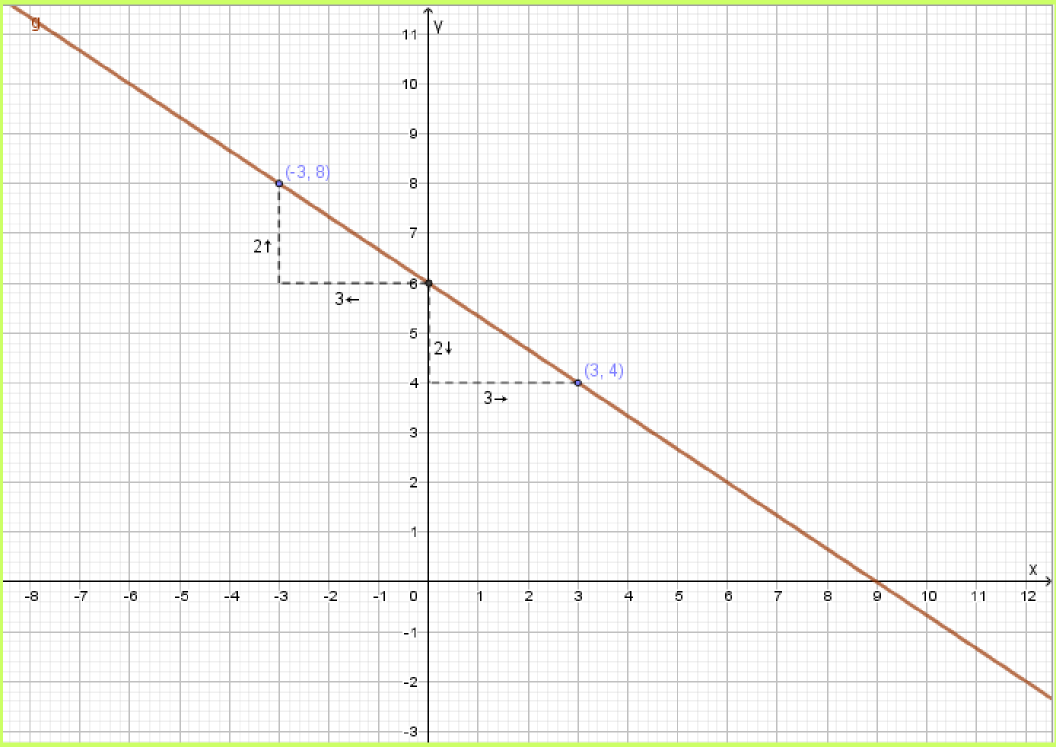
$$C^0 = \left\{-\frac{5}{9}\right\}, C^+ = \left(-\frac{5}{9}; +\infty\right) \; y \; C^- = \left(-\infty; -\frac{5}{9}\right).$$

Para graficar las demás funciones lineales propuestas $\boldsymbol{g(x)=-\frac{2}{3}x+6}$, $\boldsymbol{h(x)=-4x-1}$ y $\boldsymbol{t(x)=3}$, podemos elegir cualquiera de las estrategias mencionadas antes.

Por ejemplo, para la función *g* sabemos que su ordenada al origen es 6, es decir que corta al eje y en (0;6). Busquemos su raíz, para luego graficar:

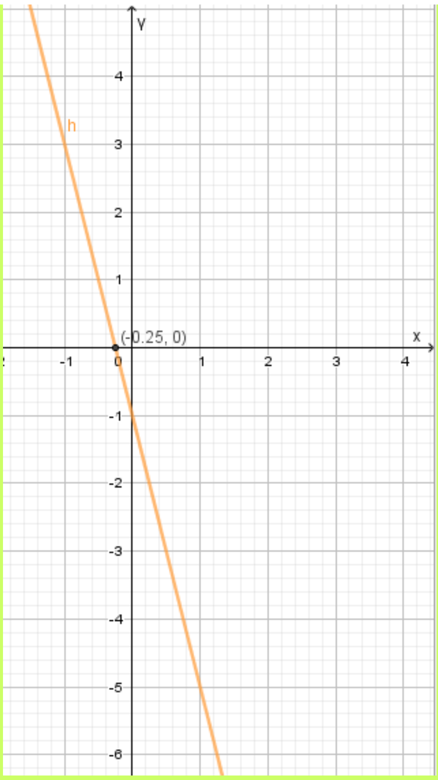
$$-\frac{2}{3}x+6=0 \Longrightarrow x=-6.\left(-\frac{3}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x=9}$$

Luego, la raíz de la función *g* es $(9;0)$. Trazamos la recta que contiene a los dos puntos, pero observemos que si desde la ordenada al origen se incrementan 3 unidades según x y se disminuyen 2 unidades según y, hallamos otro punto que pertenece a la recta. O si, al revés, desde la ordenada al origen se retrocede 3 unidades en la variable x y se aumentan 2 unidades en la variable y, también encontraremos otro punto por donde pasa la recta. Es decir que, si la pendiente de la recta es negativa, una de las variaciones, Δx ó Δy, será negativa y a otra positiva. Además, en este caso, vemos que la gráfica de la función es decreciente, puesto que a mayor valor de la variable independiente, disminuye la variable dependiente. En conclusión, si la pendiente de la recta que representa la función lineal es negativa, entonces tendrá una gráfica decreciente.



En este caso: $C^0=\{9\}$, $C^-=(9;+\infty)$ y $C^+=(-\infty;\ 9)$.

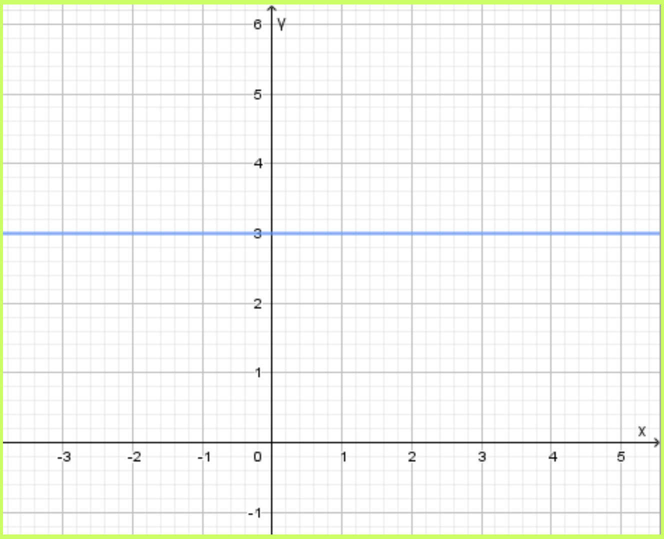
Para la función de fórmula $\boldsymbol{h(x)=-4x-1}$, podemos marcar el punto correspondiente a la ordenada al origen $(0;-1)$ y desde ahí encontrar otro punto sabiendo que por cada unidad que aumente la variable x, disminuye 4 unidades la variable y. Sabemos que la recta es decreciente porque el valor de $m=-4$ es negativo y si buscamos su raíz, obtenemos $\frac{1}{4}$.



Para la función h: $C^0 = \{-0{,}25\}$, $C^- = (-0{,}25; +\infty)$ y $C^+ = (-\infty;\ -0{,}25)$.

Luego, veamos qué sucede con la función de fórmula $\boldsymbol{t(x) = 3.}$ ¿Cuál es su pendiente? En este caso, *m* vale 0, puesto que también podemos pensar la función así: $\boldsymbol{t(x) = 0x + 3.}$

Observemos que, sin importar qué valor tome x, al reemplazar en la fórmula de la función, ésta va a dar siempre 3; es decir que la imagen es constantemente 3, para cualquier valor del dominio. Por lo tanto, la gráfica de esta función es una recta horizontal, paralela al eje x. En este caso, la función no tiene raíz puesto que no corta al eje de abscisas. ¿Existirá alguna función lineal cuya gráfica sea horizontal e interseque al eje horizontal? Observemos el gráfico de la función *t* y luego pensemos la respuesta.



La única recta que interseca al eje x es la que corresponde a la función lineal $q(x) = 0$, puesto que su gráfico es el eje de abscisas, por lo que tiene infinitas raíces.

Para el caso de la función t: $C^0 = \emptyset\,, C^- = \emptyset\ y\ C^+ = \mathbb{R}$.

Y para la función q: $C^0 = \mathbb{R}\,, C^- = \emptyset\ y\ C^+ = \emptyset$.

Resumiendo:

Según el valor de la pendiente m de la función lineal $f(x) = mx + b$, podemos decir antes de graficar si la recta que la representa será creciente, decreciente o constante (horizontal):

- Si $m > 0$ entonces la recta es creciente.
- Si $m < 0$ entonces la recta es decreciente.
- Si $m = 0$ entonces la recta es horizontal (función constante).

Resolver las siguientes actividades

Actividad 3

1) Graficar las siguientes funciones lineales, hallando dos puntos cualesquiera de la misma. Luego, verificar que se cumple la relación vista de las pendientes con el crecimiento o decrecimiento de la función. Hallar la raíz y ordenada al origen, en cada caso, y verificar que la recta contiene a dichos puntos. En cada caso determinar los conjuntos de positividad, negatividad y de ceros.

$f(x) = 2x - 6$ $\qquad g(x) = \frac{5}{3}x + 1$ $\qquad h(x) = -5x + \frac{7}{2}$

$i(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{6}{5}$ $\qquad j(x) = -2$ $\qquad k(x) = 6x$

2) Graficar las siguientes funciones lineales, a partir de su raíz y de su ordenada al origen. Luego, verificar que se cumple la relación vista de las pendientes con el crecimiento o decrecimiento de la función. En cada caso, determinar los conjuntos de positividad, negatividad y de ceros.

$p(x) = -3x + 2$ $\qquad q(x) = 5x + 5$

$r(x) = -\frac{2}{5}x$ $\qquad s(x) = \frac{7}{8}x - 9$

Actividad 4

1) Los alumnos de cuarto año de una escuela secundaria están juntando dinero para su viaje de egresados. Ya tienen ahorrados \$15 000 y, entre rifas y otros eventos, logran juntar por mes \$5000.

a) ¿Cuál es la fórmula de la función que permite saber lo que llevan ahorrado en función del tiempo en meses?

b) ¿Qué valor representa la pendiente; cuál la ordenada al origen y cuál es el significado de ambos?

c) ¿Cuánto dinero reunirán luego de 5 meses?

d) ¿En cuántos meses lograrán reunir $80 000?

e) Van a juntar dinero durante 15 meses. Graficar la función e indique el dominio y el conjunto imagen.

2) Se está desagotando una pileta de natación que contiene 73 000 litros de agua de manera que cada una hora se pierden 2000 litros.

a) ¿Cuál es la fórmula de la función que permite saber cuántos litros van quedando en la pileta en función del tiempo en horas?

b) ¿Qué valor representa la pendiente; cuál la ordenada al origen y cuál es el significado de ambos?

c) ¿Luego de cuánto tiempo quedará la pileta vacía?

d) Graficar la función e indicar el dominio y el conjunto imagen. Interpretar en términos del problema.

Resolver la siguiente actividad

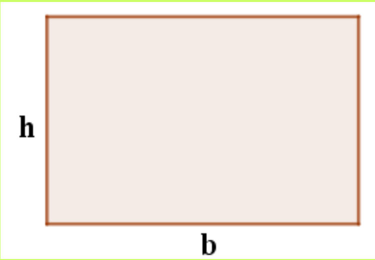
Actividad 5

En un jardín de infantes hay 80 metros de listones de madera con los que se pretende construir un arenero con forma rectangular. La directora del jardín desea que éste tenga la mayor superficie posible, así lo pueden aprovechar más niños, a la vez. ¿Qué medidas deberá tener el arenero para cumplir este cometido?

Para leer luego de haber resuelto la Actividad 5

Sobre la Actividad 5

Realicemos una figura de análisis que nos ayude a ver las medidas posibles del arenero, llamando b a la base del rectángulo (largo del arenero) y h a la altura del mismo (ancho del arenero):



Como se cuenta con $80\ m$ de madera, sabemos que ese es el perímetro de cualquier rectángulo que forme el arenero. La cuestión será decidir cuál de todos los rectángulos de igual perímetro ($80\ m$) es el de mayor área.

Por ejemplo, un arenero posible es de base $b = 10\ m$ y ancho $h = 30\ m$, puesto que si calculamos el perímetro es, efectivamente, $80\ m$ y su área es $300\ m^2$. Ahora bien, ¿será éste el arenero que la directora desea que se construya?, es decir, ¿será éste el de mayor área?

Otro posible arenero es, por ejemplo, uno de base $b = 15\ m$ y de ancho $h = 25\ m$, ya que su perímetro también es de $80\ m$ pero, ahora, su área es $375\ m^2$. Por lo tanto, el anterior arenero propuesto no es el que pretende construir la directora. Entonces, ¿cómo podremos decidir cuál es el arenero que cumple los requisitos pedidos?

Intentar resolver el problema planteando todos los areneros posibles no es conveniente, puesto que hay infinitas posibilidades de rectángulos cuyo perímetro es $80\ m$. Sí, podemos ver que algunos areneros que cumplen la condición no serían funcionales al objetivo a cumplir y, por lógica, los descartaríamos (aunque, en principio, sean posibles soluciones del problema). Por ejemplo, esto ocurre con un arenero de base $b = 39\ m$ y ancho $h = 1\ m$, ya que, además de quedar demasiado angosto, su área es bastante pequeña comparada con los otros que mencionamos ya que en este caso sería de $39\ m^2$.

Tratemos de encontrar una función que determine el área del arenero en función de las medidas del mismo.

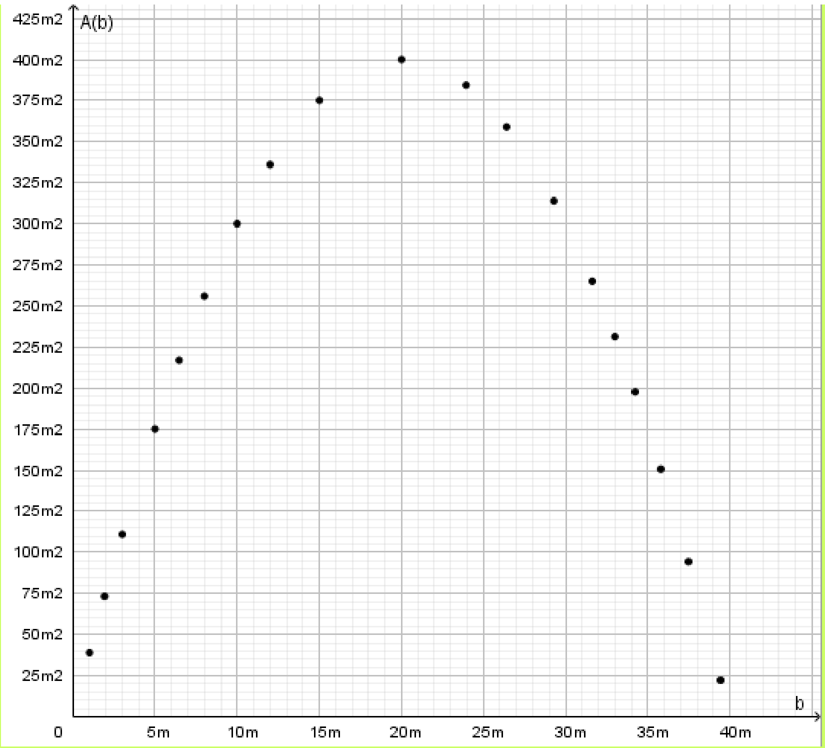
Por un lado, sabemos que el perímetro del arenero será $80\ m$ y por ser un rectángulo, también sabemos que este es la suma de la base dos veces y la altura dos veces, es decir que los lados del arenero cumplen la siguiente relación: $2b + 2h = 80$. Además, el área del arenero es $b.h$.

Si de la relación del perímetro despejamos la base *b*, por ejemplo, tenemos que $h = 40 - b$. Y si esto lo sustituimos en la fórmula del área, nos queda dependiendo de *b*:

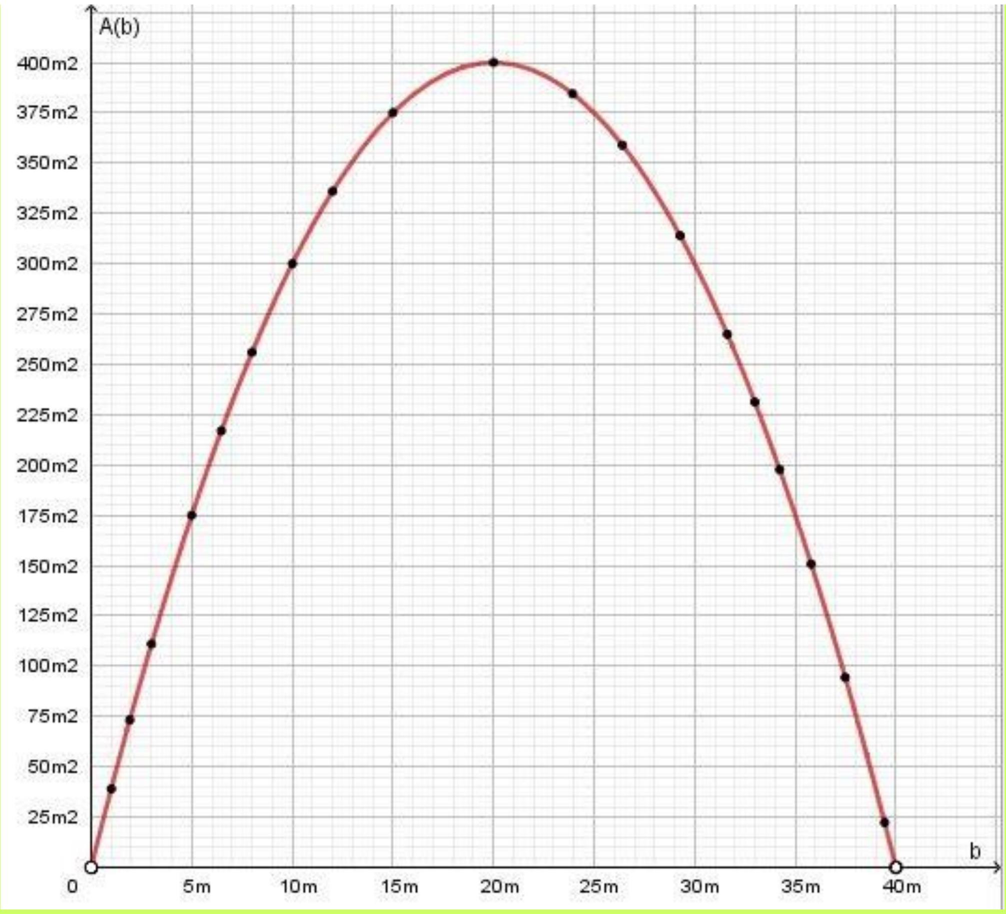
$$A = b.\underbrace{(40 - b)}_{h} \implies \boxed{A(b) = 40b - b^2}$$

Ahora bien, para que sea la función que determine el área de los posibles areneros a construir en función de la base del mismo debemos determinar cuál será su dominio adecuado. Y, dado que los lados del arenero solo pueden ser positivos (ya que no tiene sentido hablar de un lado de $0\ m$ o de $-12\ m$, por ejemplo), podemos plantear que tanto *b* como *h* deben ser mayores que cero. Puesto que $h = 40 - b$, entonces $40 - b > 0$, luego $40 > b$ y, por lo tanto, los valores de la base deben ser mayores que cero y menores que 40 metros. Es decir que el dominio de la función *A* es el intervalo (0; 40). Observar que lo mismo sucederá con los valores posibles de la altura del rectángulo (ancho del arenero) este no podrá ser menor a cero ni mayor o igual a $40\ m$.

Grafiquemos algunos puntos de la función para ver cómo será su gráfico, ya que la fórmula no corresponde a una función lineal, puesto que la variable independiente está elevada al cuadrado. Este tipo de funciones donde la mayor potencia de la variable es el cuadrado, la llamamos ***función cuadrática.***



Tal como se observa con algunos puntos marcados (que se pueden obtener mediante tabla de valores), la función crece hasta cierto valor y luego comienza a decrecer. Esto sucede porque a medida que se aumenta el largo del arenero (b) disminuye el ancho del mismo (h) y por lo tanto el área de los diferentes rectángulos aumenta hasta cierto valor (que según el gráfico se ve que es cuando $b = 20\ m$, por lo tanto $h = 20\ m$ y el área es $400\ \ m^2$) pero luego disminuye ya que si bien la base es cada vez mayor, la altura disminuye tanto que el producto $b.h$ se reduce cada vez más tendiendo al valor cero. Dado que la longitud es una variable continua, se podrían marcar infinitos puntos que forman una curva continua, comprendida para los valores del dominio entre 0 y 40, con lo cual se forma la siguiente curva que se denomina ***parábola***.



Podemos ver en la gráfica que los puntos $(0;0)$ y $(40;0)$ no están incluidos (por eso es que se hicieron puntos "vacíos") ya que correspondería al caso en que la base (o ancho) del arenero mida 0 y 40 metros respectivamente; la altura del rectángulo (o ancho del arenero) sería 40 y 0 metros respectivamente y, por lo tanto, el área sería nula, es decir, no se podría construir el arenero ya que usaríamos toda la madera para dos de los lados del mismo y nos faltaría para los otros dos lados.

Además, se puede observar en el gráfico de esta función que hay simetría respecto de la recta vertical $b = 20$, que es el valor del ancho donde se obtiene la máxima área del arenero, tan como pidió la directora del jardín de infantes. Este valor lo podríamos haber calculado sacando el promedio de los valores que tienen la misma imagen (valores simétricos).

Por ejemplo: $b = 2$ y $b = 38$ son simétricos, puesto que $A(2) = 2(40-2) = 2.38 = 76$ y $A(38) = 38(40-38) = 38.2 = 76$.

Entonces el punto medio es: $\frac{2+38}{2} = 20$

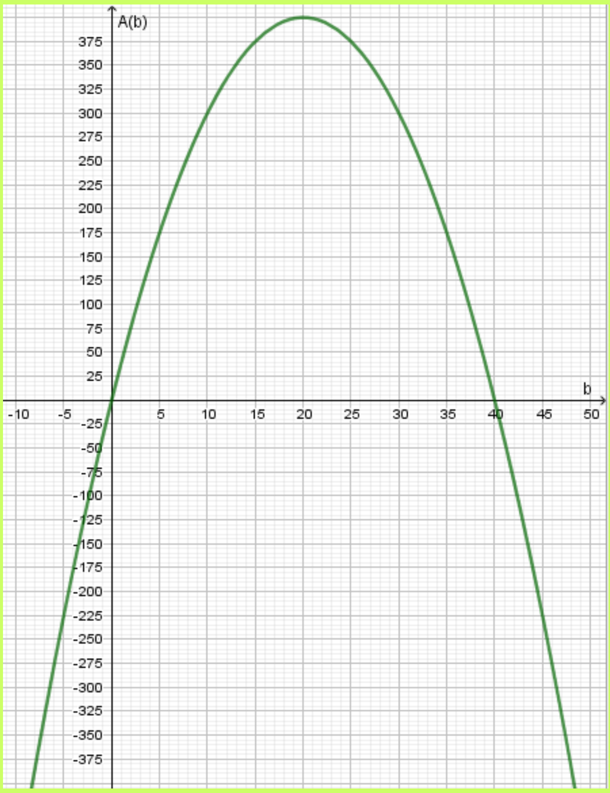
También se podría haber calculado usando $b = 10$ y $b = 30$ que también son simétricos, puesto que, en ambos casos, la imagen es 300. Entonces el punto medio es: $\frac{10+30}{2} = 20$

Entonces, el arenero que mejor será aprovechado por los niños será el que tenga forma cuadrada, cuyo largo (base) sea de $20\ m$ y el ancho también sea de $20\ m$.

Observar que la imagen de la función comprende a las áreas de los posibles areneros, esto es, a los valores entre $0\ m^2$(sin incluirlo) y $400\ m^2$, por lo tanto, $Im\ A = (0; 400]$.

La función planteada para resolver este problema nos sirvió para introducir la función cuadrática.

Si el problema admitiera como dominio a todo el conjunto de todos los números reales, entonces su gráfica no tendría "tope" hacia los valores de ordenadas negativas, su imagen sería el conjunto $(-\infty;\ 400]$ y su gráfico lo veríamos así:



Una función cuya expresión es de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ con $a \neq 0$ es una ***función cuadrática*** y su gráfico es la curva que se denomina parábola.

Son fórmulas de funciones cuadráticas, por ejemplo:

$f(x) = 5x^2 - 4x + 7$ $\quad g(x) = -0{,}5x^2 + x - 3$ $\quad A(b) = 40b - b^2$ $\quad H(t) = 3t^2 + 8$

Se llaman ***valores simétricos*** en una función cuadrática a aquellos valores del dominio de la función que tienen la misma imagen. Para la función del problema analizado: 2 y 38; 10 y 30; 15 y 25; entre otros.

Se llama ***vértice*** de una parábola al punto del gráfico cuya abscisa tiene la particularidad de que su simétrico es el mismo valor. Esta coordenada se encuentra en el medio de cualquier par de valores simétricos. El punto $(20; 400)$ es el vértice de la función cuadrática que planteamos para resolver el problema del arenero.

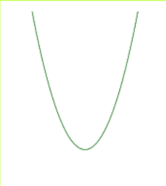
La forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ se conoce como *forma polinómica* de la función cuadrática.

Para la función del problema analizado, el valor de ***a*** es -1, el de ***b*** es 40 y el de ***c*** es cero. Observar que el valor de ***a***, llamado *coeficiente principal*, es negativo y el gráfico es una parábola cóncava hacia abajo. Esto mismo sucederá con cualquier función cuadrática cuyo coeficiente principal sea negativo. En cambio, cuando éste sea positivo, el gráfico de la función cuadrática será una parábola cóncava hacia arriba.

Entonces:

En toda función cuadrática el coeficiente principal a define la concavidad de la parábola que la representa:

- Si $a > 0$, entonces la parábola es cóncava hacia arriba.



-- Si $a > 0$, entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

Como ya vimos, las raíces de una función son los valores del dominio que tienen imagen cero. Para hallarlos en una función cuadrática tendremos que resolver la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

y tal como se vio previamente, esto corresponde a una ecuación cuadrática cuya resolución se hace aplicando la fórmula resolvente: $\boldsymbol{x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$, con la que podemos obtener las soluciones, es decir, dos raíces (o dos cortes con el eje de abscisas), una sola solución (la parábola "toca" al eje de abscisas en un solo valor) o ninguna solución (la parábola no interseca al eje de abscisas).

Para encontrar el vértice de una parábola podemos buscar dos valores simétricos y realizar el promedio de ellos. Estos podrían ser las raíces de la función, si existen. Si una de ellas es $\boldsymbol{x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ y la otra es $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$, si buscamos el promedio de estos dos valores tendremos la abscisa del vértice, es decir que

$\boldsymbol{x_V = \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2}}$ operando y simplificando nos queda: $x_V = \frac{-b}{2a}$.

Luego, para calcular la ordenada del vértice bastan con reemplazar x_v en la función: $y_V = f(x_v)$.

Se puede comprobar que esta fórmula para encontrar la abscisa del vértice de una parábola también sirve, aunque la misma no tenga raíces o tenga una sola doble.

En conclusión:

Las coordenadas del vértice de una parábola son: $\boldsymbol{V} = \left(\frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}; \boldsymbol{f}\left(\frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)\right)$

Otro punto importante es el que corresponde a la ordenada al origen, que se obtiene, como ya vimos, reemplazando la x por cero; en el caso de una cuadrática, corresponde al valor de c puesto que $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$.

Con todo lo analizado, podemos decir que, para realizar el gráfico aproximado de una función cuadrática, no es necesario realizar una tabla con muchos valores, sino que alcanza con conocer las coordenadas del vértice, las raíces si existen, el punto correspondiente a la ordenada al origen y su punto simétrico, o sino cualquier par de puntos simétricos con sus correspondientes imágenes.

Veamos como graficamos una función cuadrática teniendo en cuenta las conclusiones que obtuvimos:

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ como $\begin{cases} a > 0 \text{ entonces} \cup \\ \mathrm{c} = \frac{5}{2} \, es \text{ la ord.al origen} \end{cases}$

Vértice: $x_V = -\frac{-3}{2.\frac{1}{2}} = 3, \qquad y_V = f(3) = \frac{1}{2}.3^2 - 3.3 + \frac{5}{2}$

Por lo tanto, el vértice es: **V= (3;-2)**

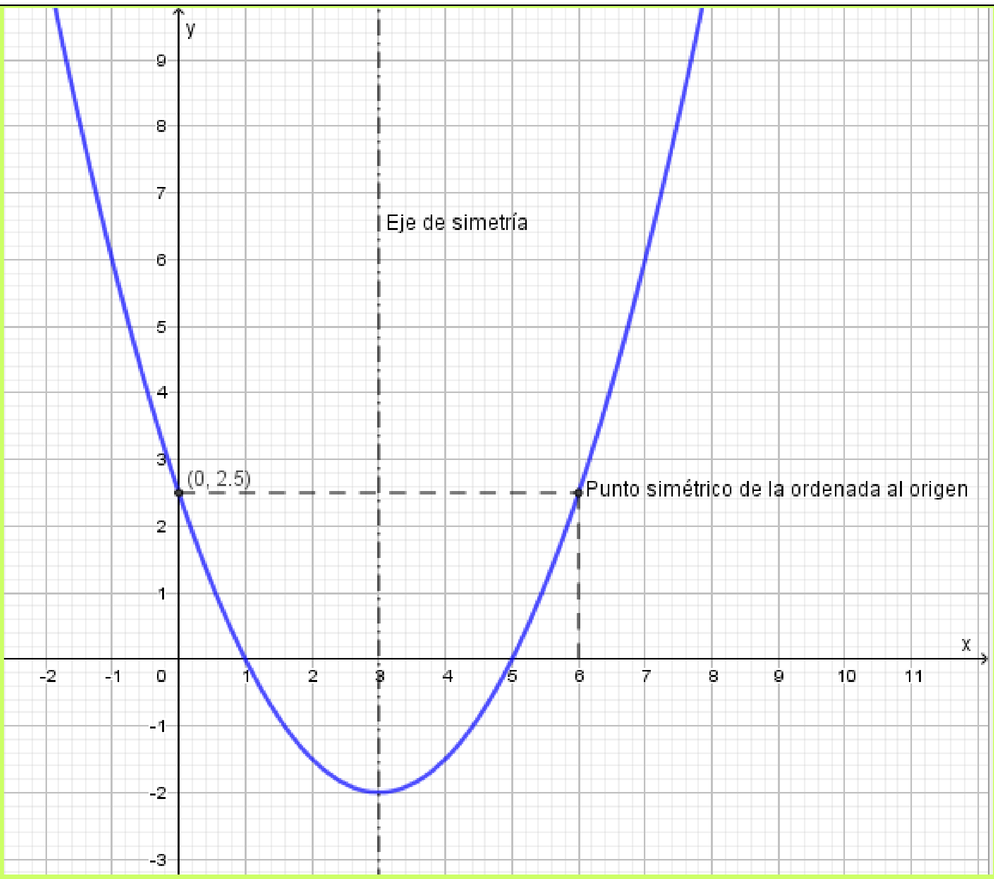
Analicemos:

Como el vértice está en el cuarto cuadrante y la parábola es cóncava hacia arriba, entonces seguro habrá dos raíces. Igualando f(x) a cero no podremos despejar x, por lo que aplicamos la fórmula resolvente.

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{3^2 - 4.\frac{1}{2}.\frac{5}{2}}}{2.\frac{1}{2}} = \frac{3 \pm \sqrt{9-5}}{1}$, entonces $\begin{cases} x_2 = 3 + 2 \Rightarrow \\ x_2 = 3 - 2 \Rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{matrix}}$

Con todo esto, ya podemos hacer el gráfico porque sabemos que la parábola tiene vértice en $(3; -2)$, que corta al eje x en 5 y en 1 y que corta al eje y en $\frac{5}{2} = 2{,}5$. Y un quinto punto va a ser el simétrico de la ordenada al origen respecto del eje de simetría que es la recta que contiene a x_V.

Entonces, el gráfico debe quedar así:



Para esta función tenemos que:

$Im\, f = [-2;+\infty), C^0 = \{1;5\}, C^+ = (-\infty;1) \cup (5;+\infty), C^- = (1;5)$.

Y que la función es creciente en el intervalo $(3;+\infty)$y es decreciente en el intervalo $(-\infty;3)$. El mínimo relativo y absoluto es -2 que lo alcanza en x=3, esto es, el punto vértice de la gráfica de la función.

La forma polinómica no es la única en que se puede expresar la función cuadrática; existen dos más.

FORMA CANÓNICA: $f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$

Es otra forma de expresar la función cuadrática, donde a es el mismo coeficiente principal que definimos antes y x_Ve $y_V$son las coordenadas del vértice de la parábola.

Por lo tanto, si queremos expresar el ejemplo anterior en forma canónica nos queda así: $f(x) = \frac{1}{2}.(x-3)^2 + (-2)$, o directamente: $f(x) = \frac{1}{2}.(x-3)^2 - 2$

Y si tenemos una función cuadrática en forma canónica, ya sabemos las coordenadas del vértice. Por ejemplo, para $f(x) = -5.(x+7)^2 - 1$, el vértice es el punto: $(-7;-1)$.

En este caso además $a = -5$, es decir es negativo, entonces la parábola es cóncava hacia abajo. Y como el vértice está en el tercer cuadrante, en este caso el gráfico NO interseca al eje *x*. Así que, si tenemos que graficar, no tenemos que buscar las raíces.

FORMA FACTORIZADA: $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$

Es otra forma de expresar la función cuadrática. Donde a es el mismo coeficiente principal que definimos antes, y x_1 e x_2 son las raíces de la parábola.

Sólo podremos escribir la función cuadrática de esta forma si tienen raíces (sea una doble o dos simples). Por lo tanto, si queremos expresar la función cuadrática de nuestro ejemplo en forma factorizada nos queda así: $f(x) = \frac{1}{2}.(x-1).(x-5)$

Y si tenemos una función cuadrática en forma factorizada, ya sabemos las raíces. Por ejemplo, para $f(x) = 4.(x+7).(x-2)$, las raíces son -7 y 2. Y además es cóncava hacia arriba porque a=4, es decir, positivo.

Resolver la siguiente actividad

Actividad 6

1) Dadas las siguientes funciones cuadráticas, indicar en qué forma están expresadas, hallar las coordenadas del vértice, raíces (si existen), ordenada al origen y cualquier otro punto necesario para realizar el gráfico aproximado. Si es posible, expresarlas en las demás formas vistas de la función cuadrática.

$g(x) = 2x^2 - x - 1$	$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$	$h(x) = x^2 - 6x$
$i(x) = 3(x+2)^2 - 4$	$j(x) = -2(x+1)(x-2)$	$k(x) = (x-5)^2 + 1$
$l(x) = -x^2 - 2$	$m(x) = x^2 - 2$	$n(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x+6)$
$o(x) = (x+3)(x-1)$	$p(x) = -(x-2)^2 + 7$	

2) Escribir la función cuadrática en forma canónica, polinómica y factorizada (si es posible) que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso:

a) que contenga al punto $(-4\,,12)$ y su vértice es $V = (-2\,,0)$

b) su vértice es $V = (0,8)$ y $x = 2$ es raíz.

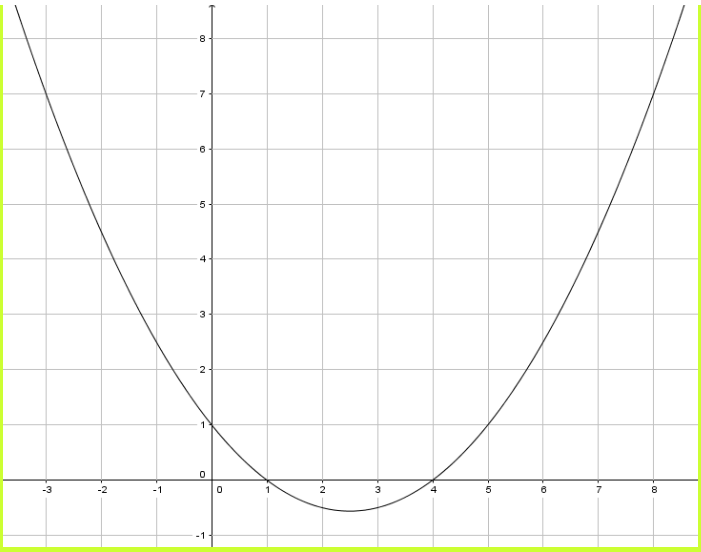
c) el vértice es $V = (-2\,,1)$ y la ordenada al origen 3

d) sus raíces son $x_1 = 2+\sqrt{5}, x_2 = 2-\sqrt{5}$ y $f(-1) = 12$

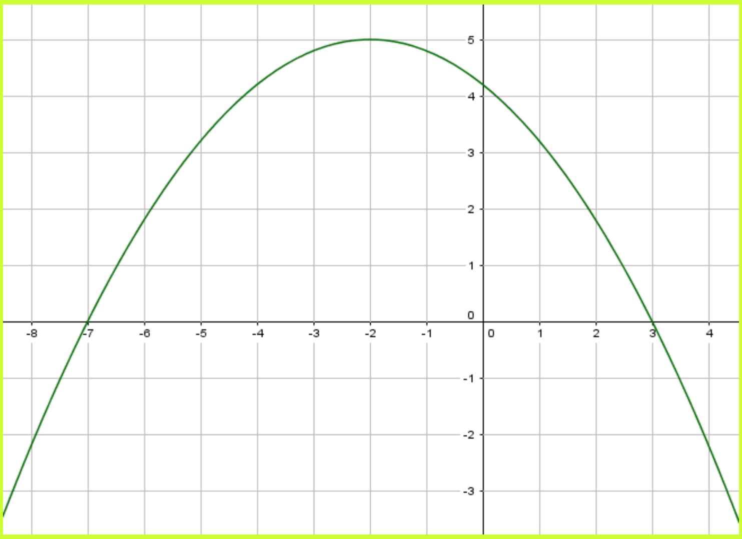
e) las raíces son $x_1 = 1, x_2 = 5$ y el máximo es $y = 8$.

3) En cada caso, plantear la función cuadrática cuyo gráfico es el que sigue:

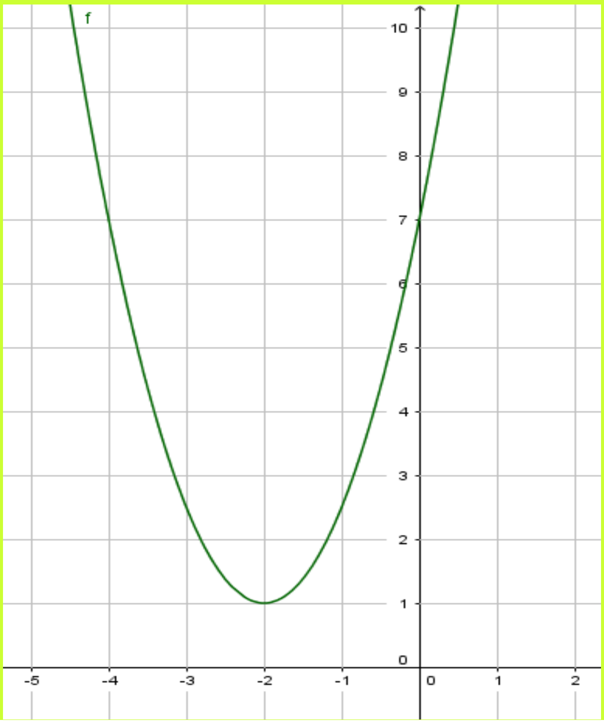
a)



b)



c)



Actividad 7

1) Se lanza una pelota desde el suelo hacia arriba. La altura que alcanza la pelota, medida desde el suelo en metros, en función del tiempo, medido en segundos, se calcula a través de la siguiente fórmula:

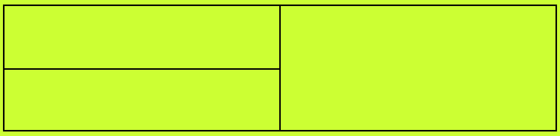
$$h(t) = 20t - 5t^2.$$

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y en qué momento lo hace?

b) ¿Después de cuánto tiempo cae la pelota al suelo?

c) Responder las preguntas anteriores si la pelota se lanza a 25 metros del suelo.

2) Se quiere construir un cantero como el del dibujo donde la división vertical se encuentra en el medio, para ello se cuenta con 250 metros de alambre y se desea utilizarlo todo para bordear el cantero y las divisiones. ¿Cuáles deben ser las medidas para que el área sea máxima?



3) Se desea cercar un campo y dividirlo en 6 parcelas iguales, como muestra el dibujo. Se dispone de 1200 metros de alambre. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que el área cercada sea máxima?