V ¿EN CUÁNTO TIEMPO CALENTAMOS EL AMBIENTE?

5 – 1. Enfriamiento de los cuerpos

Hasta ahora nos hemos referido a las variaciones de temperaturas en las superficies de los cuerpos sólidos y hemos hecho algunas suposiciones acerca de las variaciones de temperatura en el interior de los mismos tratando de explicar cómo se transfiere el calor en cuerpos consistentes. En nuestros análisis anteriores hemos supuesto que los fluidos en contacto con los cuerpos a distinta temperatura mantienen constantes las suyas. Nos referiremos ahora a la interacción entre sólidos y fluidos en contacto que se encuentran a temperaturas diferentes.

El estudio de la transferencia de calor desde un cuerpo de volumen y forma definidos a un fluido con el que está en contacto, o viceversa, presenta ciertas dificultades experimentales. Debemos hacer notar que, en muchos casos, dicha transferencia de calor está asociada a la transferencia de materia entre las fases en contacto, por ejemplo cuando un sólido funde o se volatiliza. Además, las partículas que constituyen un fluido tienen un movimiento desordenado, llamado movimiento browniano. Si el fluido está en equilibrio térmico con su ambiente, se comporta de manera tal que la temperatura tiene el mismo valor en todos sus puntos. Pero cuando un fluido está sujeto a la acción de cuerpos que se encuentran a temperaturas diferentes el movimiento de las partículas se hace más intenso al punto que, cuando la diferencia de temperaturas con los cuerpos que interactúa supera un determinado valor, los movimientos se tornan tan caóticos que imposibilitan la determinación de un valor único de temperatura aún en una región muy pequeña del fluido.

También se presentan problemas experimentales debido a que parte de la energía que disipa un cuerpo de forma definida en contacto con un fluido a temperatura menor es energía radiante.

El desarrollo exhaustivo de los temas referidos a la transferencia de calor por convección escapa a los contenidos del presente capítulo y puede verse en los textos de “Transferencia de calor y materia”. En las secciones siguientes sólo haremos un análisis somero del concepto de rozamiento viscoso, de los tipos de movimientos que experimentan los fluidos por convección y algunos casos de transferencia que se pueden resolver en forma sencilla.

5 – 2. La fuerza de rozamiento viscoso

Cuando un fluido se halla en contacto con un sólido, presenta siempre una capa que permanece como adherida a la superficie del sólido. Esta capa se suele llamar *capa límite*. El espesor de esta capa depende de las naturalezas del fluido y del sólido, de las temperaturas de ambos en la superficie de contacto, de la presión que ejerce el fluido y, si este último está en movimiento, del tipo de régimen – laminar o turbulento – con el que se desplace.

La existencia de esta capa se debe a que todo fluido tiene una cierta “viscosidad”. Esta viscosidad provoca rozamiento entre las distintas capas del fluido (y en la superficie de contacto entre el fluido y un sólido). La fuerza debida al rozamiento viscoso es tangencial a la dirección en que se desplaza el fluido pero tiene sentido contrario.

La fuerza de rozamiento viscoso tiende a deformar al fluido en movimiento. La relación entre la fuerza deformante y la superficie sobre la que actúa tangencialmente se denomina “*esfuerzo cortante*” o “*fuerza de cizalladura*”.

Si observamos el movimiento de un fluido viscoso — por ejemplo aceite — a través de un tubo transparente de sección uniforme, notaremos que el frente del fluido tiene forma curva que parece parabólica. Esto es, en cada sección el fluido que se desplaza por el centro del tubo tiene una velocidad máxima y esta velocidad va disminuyendo hacia las paredes. Cuando el fluido “moja” la pared queda como adherido a la misma. De esta manera, la velocidad de la capa fluida en contacto con la pared interior del tubo es nula.

Ya Newton había propuesto una fórmula matemática que permite calcular la fuerza de rozamiento viscoso f_r entre dos capas de fluido que se desplazan en forma paralela siendo la superficie de contacto una superficie elemental dA. Esa fuerza de rozamiento depende del área de esa superficie y del gradiente de velocidad del fluido en la dirección normal al desplazamiento. Si llamamos x a la dirección perpendicular a que cual se desplaza el fluido y v a la velocidad de desplazamiento, el gradiente de velocidad estará dado por $\partial v/\partial x$. De aquí que la fuerza de rozamiento viscoso se escriba

$$f_r = \eta dA \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (5 - 1)$$

η recibe el nombre de *coeficiente de viscosidad absoluta* (o, simplemente, *coeficiente de viscosidad*) del fluido considerado. Depende fundamentalmente de la naturaleza del mismo, de la temperatura y, en mucha menor medida, de la presión. De la expresión anterior resulta

$$\eta = \frac{f_r}{dA \frac{\partial v}{\partial x}} \qquad (5 - 2)$$

Por tanto,

El coeficiente de viscosidad viene medido por la fuerza de rozamiento viscoso entre dos capas paralelas de superficie de contacto unitaria, cuando el gradiente de velocidad en la dirección normal al desplazamiento de las capas es unitario.

En el S.I. el coeficiente de viscosidad se expresa en $kg.m^{-1}.s^{-1}$. Sin embargo, es de práctica expresarlo en $g.cm^{-1}.s^{-1}$. Esta unidad se llama *poise* en homenaje al médico francés Jean Louis Marie Poiseuille[1], quien en 1844 publicó un trabajo describiendo el flujo viscoso de la sangre a través de los capilares sanguíneos.

[1] **Jean Louis Marie Poiseuille** (1799 – 1869) Médico y filósofo francés

Ejemplo 5.1

La viscosidad de un fluido decrece con la temperatura. Para el caso del tetracloroetileno la dependencia del coeficiente de viscosidad con la temperatura a 1 *atm* en el intervalo en que es líquido (251,0 – 394,3 *K*) viene dada por

$$\ln \eta = 902{,}8 \times \left(\frac{1}{T} - 3{,}548 \times 10^{-3} \right)$$

con η en centipoise. Calcular la variación de la viscosidad del tetracloroetileno cuando la temperatura aumenta de 25 a 35 ºC.

Resolución

Para T= 298,15 K es

$$\ln \eta = 902{,}8 \times \left(\frac{1}{298{,}15} - 3{,}548 \times 10^{-3} \right) = 0{,}839\, cpoise$$

Para T= 308,15 K

$$\ln \eta = 902{,}8 \times \left(\frac{1}{308{,}15} - 3{,}548 \times 10^{-3} \right) = 0{,}761\, cpoise$$

Notamos que un aumento de temperatura de apenas 10 *K* disminuye la viscosidad de este fluido en un 9,3 %. En general, la disminución de la viscosidad de un fluido con la temperatura es bastante importante

---

Un fluido que cumpla con la ecuación (5 - 2) se llama *fluido newtoniano*.

El gradiente de velocidad en la dirección del desplazamiento del fluido se corresponde con el grado con que varía la deformación a lo largo de esa dirección. Teniendo en cuenta el concepto de esfuerzo cortante dado más arriba, la ley de Newton se suele expresar: *El esfuerzo cortante que actúa sobre un fluido es proporcional a la velocidad de deformación*

$$\frac{esfuerzo\ cor\tan te}{velocidad\ de\ deformación} = cte = \eta$$

Por supuesto, hoy sabemos que η no es estrictamente una constante sino un coeficiente que depende de los factores mencionados anteriormente.

Ejemplo 5.2.

Son ejemplos de fluidos newtonianos los gases, los líquidos tanto si son sustancias puras o soluciones líquidas verdaderas. En cambio, las dispersiones coloidales, los lodos, geles y, en general, los sistemas fluidos que resultan ser heterogéneos al observarlos con el ultramicroscopio son fluidos *no newtonianos*. En estos fluidos la representación gráfica del cociente entre la fuerza de rozamiento viscoso y el área de superficie en función del gradiente de velocidad no es una recta.

La velocidad de circulación de un fluido viene medida por el volumen de fluido que atraviesa normalmente la unidad de superficie en la unidad de tiempo. En símbolos

$$v = \frac{1}{dA}\frac{dV}{d\tau}$$

Es decir, la velocidad de circulación viene dada por el flujo de volumen, o por el caudal ($dV/d\tau$) que atraviesa la unidad de superficie.

Una característica distintiva de los movimientos en *régimen laminar* de los fluidos es que su velocidad de circulación a través de cualquier superficie elemental, depende de las coordenadas de la superficie pero es independiente del tiempo.

Estudiaremos el caso sencillo en el que un fluido se desplaza a través de un tubo de sección uniforme de diámetro D.

Se encuentra experimentalmente que cuando un fluido se mueve en régimen laminar a través de un tubo de sección uniforme, la presión es sólo función de la longitud recorrida por el fluido. Dicho de otra manera, la diferencia de presión entre dos secciones del tubo es siempre la misma. Además, se observa que la velocidad es cero para un radio $r = D/2$.

Consideremos un volumen cilíndrico de un fluido newtoniano, — tal como el representado en la Figura 5 - 1 — de radio r y de longitud L. Para que el fluido se desplace debe existir una diferencia de presión entre sus extremos. Además, para que ese desplazamiento ocurra en régimen laminar esa diferencia de presión debe ser constante, sólo en esas condiciones la velocidad de circulación del fluido es constante.

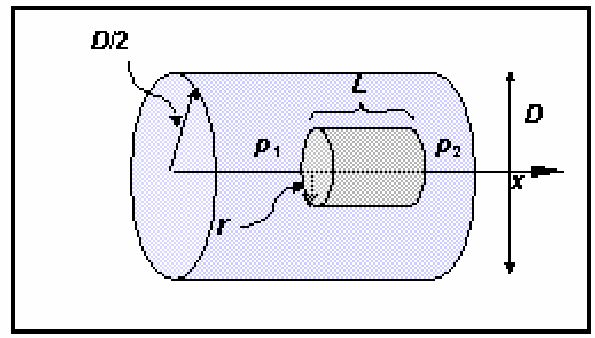

Figura 5 – 1. Flujo laminar de un fluido viscoso en un tubo cilíndrico. La velocidad depende sólo de r, mientras que la presión depende sólo de x.

El área exterior de ese volumen cilíndrico es $2\pi rL$, y sobre esta superficie, el resto del fluido ejerce una fuerza de rozamiento viscoso proporcional al gradiente de velocidad $\partial v/\partial r$. Por lo tanto, la fuerza de rozamiento viscoso vendrá dada por

$$f_r = \eta 2\pi rL\frac{\partial v}{\partial r}$$

Esta fuerza de rozamiento tiene la misma dirección pero sentido opuesto a la fuerza debida a la diferencia de presión $(p_2 - p_1)\pi r^2$. Como en el régimen laminar, la cantidad de fluido que por unidad de tiempo entra por una cara es igual a la que sale por la otra, la superficie cilíndrica permanece estacionaria, lo que indica que ambas fuerzas se anulan. Esto nos permite escribir

$$\eta 2\pi rL\frac{\partial v}{\partial r} = (p_2 - p_1)\pi r^2$$

o

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 + \eta 2\pi rL\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

Separando variables

$$-\,dv = \frac{p_1 - p_2}{L}\frac{1}{2\eta}\,r\,dr$$

Para integrar esta ecuación diferencial debemos tener presente que en régimen laminar cuando el radio del cilindro en cuestión se hace igual a la mitad del diámetro del tubo por el cual circula el fluido, este se encuentra como adherido a la pared del tubo y, por lo tanto, la velocidad v para $r = D/2$ es cero.

$$-\int_v^0 dv = \frac{p_1 - p_2}{L}\frac{1}{2\eta}\int_r^{D/2} r\,dr$$

de aquí deducimos que

$$v = \frac{p_1 - p_2}{L}\frac{1}{4\eta}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right) \qquad (5 - 3)$$

Esta ecuación nos muestra que las velocidades de un fluido viscoso que se mueve en régimen laminar a través de un cilindro tienen una distribución parabólica, con una velocidad máxima en el centro y nula en las paredes.

En cualquier sección transversal del tubo, comprendida entre dos circunferencias de radios r y $r + dr$, la velocidad es la misma. Dicho de otra manera, la velocidad es la misma para cualquier sector circular de área $2\pi r dr$ concéntrico con el tubo.

En régimen laminar el caudal, $dV/d\tau$, que circula a través de toda la sección del tubo es

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{\Delta V}{\Delta \tau}$$

y, a partir de

$$v = \frac{1}{dA}\frac{dV}{d\tau}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta \tau} = \int_0^{D/2} v\,dA = \int_0^{D/2} v 2\pi r\,dr$$

cuya resolución da

$$\frac{\Delta V}{\Delta \tau} = \frac{\pi D^4}{128\eta}\frac{p_1 - p_2}{L} \qquad (5 - 4)$$

La (5 – 4) se conoce como ecuación de Poiseuille deducida por él mismo en 1844.

Midiendo el gradiente de presión $(p_1 - p_2)/L$, el diámetro D y el caudal que fluye a través del tubo en régimen laminar, se puede obtener el coeficiente de viscosidad.

Como

$$v = \frac{p_1 - p_2}{L}\frac{1}{4\eta}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)$$

La velocidad máxima $v_{MÁX}$ es el valor que toma la velocidad cuando $r = 0$; es decir

$$v_{MÁX} = \frac{p_1 - p_2}{L}\frac{D^2}{16\eta}$$

Esto nos permite escribir la ecuación de Poiseuille

$$\frac{\Delta V}{\Delta \tau} = \frac{\pi D^2}{4}\frac{v_{MAX}}{2}$$

Se define velocidad media v_M como el volumen total de fluido que circula por unidad de tiempo, $dV/d\tau$ dividido por la sección del tubo $\pi D^2/4$

$$v_M = \frac{v_{MAX}}{2}$$

El flujo laminar de un fluido viscoso en un tubo cilíndrico se caracteriza por el hecho de que la velocidad media es la mitad de la velocidad máxima.

La experiencia indica que hay una combinación de cuatro factores que permite determinar si la circulación de un fluido a través de un tubo es laminar o no. Esa combinación se llama *Número de Reynolds*, (N_{Re}) que se define mediante

$$N_{Re} = \frac{\delta v_M D}{\eta} \qquad (5 - 5)$$

En esta expresión δ es la densidad del fluido, v_M es la velocidad media, D el diámetro del tubo y η el coeficiente de viscosidad. Se encuentra que para valores por debajo de 2000, el régimen es laminar, mientras que por encima de los 3000 el régimen es decididamente turbulento.

Ejemplo 5.3.

Se llama *viscosidad cinemática* a la relación entre el coeficiente de viscosidad de un fluido y su densidad. Cuando el coeficiente de viscosidad se expresa en poise y la densidad en $g.cm^{-3}$, la viscosidad cinemática se expresa en stokes. En qué unidades se expresará la viscosidad cinemática en el SI.

Solución:

En el SI la viscosidad se expresa en $kg.m^{-1}.s^{-1}$ y la densidad en $kg\ m^{-3}$, en consecuencia, la viscosidad cinemática se expresa en $m^2 s^{-1}$

Ejemplo 5.4.

Por un tubo de 48 *mm* de diámetro fluye aceite de ricino a 20 ºC con una velocidad media de 10 *m/s* Calcular el Número de Reynolds sabiendo que la viscosidad y la densidad del aceite de ricino a 20 ºC son 9,86 poise y 0,894 g/cm^3, respectivamente.

Solución:

El número de Reynolds viene dado por

$$N_{Re} = \frac{\delta v_M D}{\eta}$$

Por lo tanto

$$N_{Re} = \frac{0{,}894 \times 10^3 \times 4{,}8}{9{,}86} = 435{,}2$$

---

5 – 3. Convección del calor

Llamamos *corriente convectiva* a una corriente de fluido que al absorber calor en un lugar se desplaza hacia otro donde se mezcla con una porción más fría a la que le transfiere calor. Si el movimiento del fluido es producido por la diferencia de densidad que ocasiona la diferencia de temperaturas se habla de *convección natural*. Si el movimiento se debe a la acción de algún dispositivo mecánico, se habla de *convección forzada*.

Ya hemos comentado que siempre que un fluido está en contacto con una superficie sólida, plana o curva, y aunque el fluido esté en movimiento, hay una capa delgada del mismo adherida a dicha superficie por causa de su viscosidad. También dijimos que el espesor de esta capa varía con la naturaleza de los medios en contacto, con la diferencia de temperaturas entre ambas y con el tipo de régimen, laminar o turbulento, que impere en el fluido.

Consideremos un cuerpo inmerso en un fluido que se encuentra a temperatura menor. Sean, A el área de la superficie del cuerpo en contacto con el fluido, t la temperatura del cuerpo y θ la temperatura de la capa fluida adherida al cuerpo.

Alcanzado un estado estacionario ambas temperaturas permanecen constantes a pesar de que en virtud de la diferencia entre ellas hay una transferencia constante de calor.

La velocidad de transferencia de calor a través de una superficie elemental dA será proporcional a la diferencia de temperaturas. Esto se puede expresar

$$\frac{1}{dA}\frac{\eth Q}{d\tau} \propto t - \theta$$

o, introduciendo un coeficiente apropiado

$$\frac{1}{dA}\frac{\eth Q}{d\tau} = h(t - \theta) \qquad (5-6)$$

h recibe el nombre de *coeficiente laminar de convección* o *coeficiente de convección local*. Aún para los mismos medios en contacto y las mismas temperaturas de cada uno, las condiciones de flujo varían con las dimensiones y la forma de la superficie, de modo que h no se puede considerar constante. La velocidad de transferencia de calor del cuerpo se obtiene integrando, sobre toda la superficie, el flujo a través de una superficie elemental.

$$\frac{\eth Q}{d\tau}=(t-\theta)\int_{Superficie} h dA$$

que suele escribirse

$$\frac{\eth Q}{d\tau}=\bar{h}A(t-\theta) \qquad (5-7)$$

La ecuación (5 – 7) es la expresión matemática de la *ley de enfriamiento de Newton*. $\bar{h}$ recibe el nombre de *coeficiente medio de convección*, aunque en algunos textos se lo indica como *coeficiente de conductibilidad exterior*. A partir de la ecuación (5 – 7) se encuentra que

$\bar{h}$ viene medido por el calor que por unidad de tiempo atraviesa la unidad de superficie de separación entre el sólido y el fluido a él adherido cuando la diferencia de temperatura entre ambas es unitaria. Su valor numérico depende de los mismos factores que el espesor de la capa inmóvil de fluido y se lo determina experimentalmente.

En el Sistema Internacional, las unidades de $\bar{h}$ son $Wm^{-2}K^{-1}$.

Ejemplo 5.5.

Una pared plana de 0,4 m^2 de área cuya superficie se encuentra a 38 ºC y le transfiere calor al ambiente por convección natural. Experimentalmente se encuentra que cuando la temperatura del aire en contacto con la pared es de 18 ºC, la velocidad de transferencia de calor es de 36 *W*. Calcular el valor del coeficiente medio de convección

Solución

De acuerdo con la ecuación

$$\frac{\eth Q}{d\tau}=\bar{h}A(t-\theta)$$

resulta

$$\bar{h}=\frac{1}{A(t-\theta)}\frac{\eth Q}{d\tau}$$

$$\bar{h}=\frac{36}{0,4(38-18)}=4,5\frac{W}{m^{2\,o}C}$$

Ejemplo 5.6.

Se calienta agua en una pava colocada sobre una hornalla cerámica que suministra 5600 *cal/s*. Cuando la superficie de la pava alcanza los 85ºC, la temperatura del aire en contacto es 38 ºC. Calcular el valor del coeficiente medio de convección sabiendo que el área de la pava en contacto con el aire es de 0,125 m^2.

Solución

De acuerdo con la definición

$$\bar{h}=\frac{1}{A(t-\theta)}\frac{\eth Q}{d\tau}$$

Por lo tanto

$$\bar{h}=\frac{5600\times 4,184}{0,125(85-38)}=3988,2\frac{W}{m^{2\,o}C}$$

La comparación con el resultado del ejemplo anterior muestra la amplia gama de valores que puede tomar $\bar{h}$

En la mayoría de los casos se requiere conocer la variación de la temperatura de un cuerpo sólido en contacto con un fluido a temperatura menor *a medida que se llega* a un estado estacionario de transferencia de calor. Esa variación de temperatura se calcula de la siguiente manera:

Sea *A* el área de superficie de un sólido cualquiera que está a la temperatura *t* mayor que la temperatura θ del fluido con el que está en contacto. Si la diferencia de temperaturas no es muy elevada y la masa de fluido que rodea al sólido es lo suficientemente grande, podemos suponer que el sólido se enfría sin que varíe apreciablemente la temperatura del fluido. El calor que atraviesa la superficie de separación por unidad de tiempo estará dado por

$$\frac{\eth Q}{d\tau} = \bar{h}A(t - \theta)$$

y como es calor que el cuerpo cede, podemos expresarlo como

$$\frac{\eth Q}{d\tau} = -\, cm\,\frac{dt}{d\tau}$$

donde *c* es el calor específico y *m* la masa del sólido. Igualando estas dos expresiones resulta

$$-\,cm\,\frac{dt}{d\tau} = \bar{h}A(t - \theta)$$

Separando variables

$$\frac{dt}{(t - \theta)} = -\frac{\bar{h}A}{cm}d\tau$$

Si la variación de temperaturas no es demasiado grande, podemos suponer que la superficie del cuerpo, el calor específico y el coeficiente laminar de convección son constantes, con lo que resulta sencillo integrar esta ecuación. Para un intervalo de tiempo $\Delta\tau$ la temperatura variará de t_1 a t_2 y

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{t - \theta} = -\frac{\bar{h}A}{cm}\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau$$

cuya resolución da

$$ln\frac{t_2 - \theta}{t_1 - \theta} = -\frac{\bar{h}A}{cm}\Delta\tau$$

o

$$\frac{t_2 - \theta}{t_1 - \theta} = exp\left[-\frac{\bar{h}A}{cm}\Delta\tau\right]$$

Por lo tanto, la temperatura t_2 que alcanza al cabo de un cierto intervalo de tiempo $\Delta\tau$ es

$$t_2 = \theta + (t_1 - \theta)e^{-\frac{\bar{h}A}{cm}\Delta\tau} \tag{5 - 8}$$

5 - 4. Transmisión a través de una pared plana que separa dos fluidos

Consideremos una pared plana, — como la representada en la Figura 5 - 2 — extensa, de espesor Δx constante que separa dos fluidos cuyas temperaturas son θ_1 y θ_2, con $\theta_1 > \theta_2$. Sean T_1 y T_2, las temperaturas en las caras exteriores de la pared, $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ los respectivos coeficientes medios de convección y λ el coeficiente de conductibilidad térmica de la pared. Supongamos que las masas fluidas son lo suficientemente grandes como para que sus temperaturas no sean afectadas por los intercambios de calor con la pared.

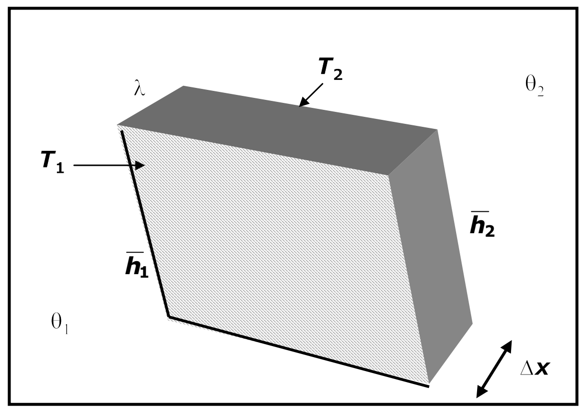

Figura 5 – 2. Pared plana que separa dos fluidos

Establecido el régimen estacionario, la velocidad de transferencia de calor en cualquier superficie de este sistema es constante. De aquí que para el calor que atraviesa por unidad de tiempo las superficies indicadas con 1, 2 y 3 de la pared podamos escribir

$$\left(\frac{\eth Q}{d\tau}\right)_1 = \bar{h}_1 A(\theta_1 - T_1) \tag{5 - 9}$$

$$\left(\frac{\eth Q}{d\tau}\right)_2 = \lambda A(T_1 - T_2)/\Delta x \tag{5 - 10}$$

$$\left(\frac{\eth Q}{d\tau}\right)_3 = \bar{h}_2 A(T_2 - \theta_2) \tag{5 - 11}$$

Como el régimen es estacionario, podemos imaginar que en ese sistema se produce una transferencia de calor análoga a la que ocurriría entre los dos fluidos y escribir una ecuación del tipo

$$\left(\frac{\eth Q}{d\tau}\right)=kA(\theta_1-\theta_2) \qquad (5 - 12)$$

con un coeficiente k a determinar. k recibe el nombre de *coeficiente de transmisión total* de la pared.

$$k(\theta_1-\theta_2)=\bar{h}_1(\theta_1-T_1)\Rightarrow\frac{k}{\bar{h}_1}\frac{(\theta_1-T_1)}{(\theta_1-\theta_2)}$$

$$k(\theta_1-\theta_2)=\lambda\frac{(T_1-T_2)}{\Delta x}\quad\Rightarrow\frac{k\Delta x}{\lambda}=\frac{(T_1-T_2)}{(\theta_1-\theta_2)}$$

$$k(\theta_1-\theta_2)=\bar{h}_2(T_2-\theta_2)\Rightarrow-\frac{k}{\bar{h}_2}=\frac{(T_2-\theta_2)}{(\theta_1-\theta_2)}$$

De aquí encontramos que

$$k\left(\frac{1}{\bar{h}_1}+\frac{\Delta x}{\lambda}+\frac{1}{\bar{h}_2}\right)=1$$

Si en lugar de existir una sola pared, el sistema estuviera formado por varias paredes paralelas de distintos materiales, es fácilmente demostrable que el coeficiente de transmisión total estará dado por una expresión del tipo

$$\frac{1}{k}=\sum\frac{1}{\bar{h}_i}+\sum\frac{\Delta x_i}{\lambda_i} \qquad (5 - 13)$$

5 – 9. Transmisión de calor a través de una barra sumergida en un fluido

Consideremos una barra de material homogéneo e isótropo en la que se establece una diferencia de temperaturas entre sus extremos como se esquematiza en la Figura 5 - 3. Si la barra está sumergida en un fluido a menor temperatura, no sólo habrá un flujo de energía térmica en la dirección del eje de la barra y en el sentido de las temperaturas decrecientes sino que, además, habrá transmisión en la dirección perpendicular a ese eje hacia el fluido que la rodea. A los efectos de simplificar el estudio consideremos que la sección de la barra es lo suficientemente pequeña de modo que, dada una sección transversal cualquiera, la temperatura en todos sus puntos es la misma. Supongamos, además, que la transmisión de calor hacia el fluido se efectúa en régimen estacionario.

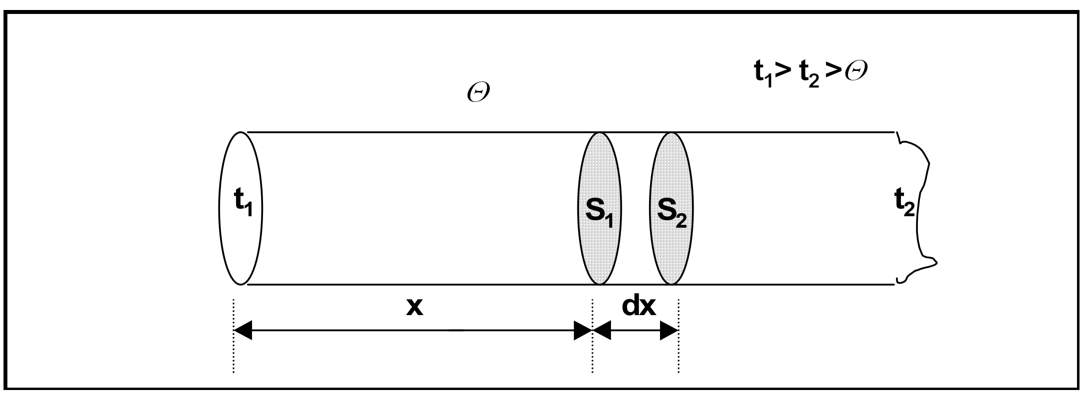

Figura 5 – 3. Barra sumergida en un fluido a menor temperatura

La energía térmica que atraviesa la sección S_1, ubicada a la distancia x del extremo a mayor temperatura estará dado por

$$\left(\frac{\eth Q}{d\tau}\right)_x=-\lambda A\frac{dt}{dx} \qquad (5 - 14)$$

La que atraviesa la sección S_2 a la distancia dx de S_1, tal que podamos considerar que su temperatura t es constante, está dado por

$$\left(\frac{\eth Q}{d\tau}\right)_{x+dx} = -\lambda A\left[\frac{dt}{dx} + \frac{d^2t}{dx^2}dx\right] \qquad (5 - 15)$$

Como el sistema está en régimen estacionario, la temperatura θ del fluido en la superficie de contacto es constante. Llamando ϖ al perímetro de la sección normal[2] El calor que cede la barra a través de la superficie en ese tramo dx, a través de toda su superficie lateral es

$$\left(\frac{\eth Q}{d\tau}\right)_{SUP.LATERAL} = \bar{h}\,\omega dx(t-\theta) \qquad (5 - 16)$$

Analicemos ahora que ocurre con la energía térmica que atraviesa el cilindro elemental de espesor dx. Dado que el régimen es estacionario, la energía que por unidad de tiempo incide sobre una cara es el mismo que se transfiere por la cara opuesta, por lo tanto la suma algebraica de las energías que se transfieren a través de su superficie exterior debe ser nula. Computando negativas las que salen y positivas las que ingresan se tiene

$$-\lambda A\frac{dt}{dx} + \lambda A\left[\frac{dt}{dx} + \frac{d^2t}{dx^2}dx\right] - \bar{h}\,\omega dx(t-\theta) = 0$$

o, simplificando

$$\lambda A\frac{d^2t}{dx^2} - \bar{h}\,\omega(t-\theta) = 0 \qquad (5 - 17)$$

Notemos que esta ecuación vincula la diferencia de temperaturas entre cada punto de la barra y la del fluido con la distancia que media al extremo de la barra que está a mayor temperatura. Reordenándola se obtiene

$$\frac{d^2t}{dx^2} - \frac{\bar{h}\,\omega}{\lambda A}(t-\theta) = 0 \qquad (5 - 18)$$

[2] En la figura se ha dibujado una barra de sección circular, pero podría ser de cualquier otra forma geométrica, siempre que sea uniforme.

El coeficiente de (t - θ) es una constante que podemos indicar con a^2.

$$\frac{d^2t}{dx^2} - a^2(t-\theta) = 0$$

Esta ecuación diferencial tiene una solución general del tipo

$$t-\theta = Ae^{ax} + Be^{-ax} \qquad (5 - 19)$$

A y B son dos constantes a determinar en función de las condiciones iniciales.

La ecuación (5 – 19) representa la distribución de la diferencia de temperaturas (t - θ) entre la barra y el fluido que la rodea.

Para poder establecer los valores de A y B, analicemos que ocurre en el extremo más frío de la barra que está a la temperatura t_f. Para calcular la diferencia de temperaturas (t_f - θ) procedemos de la siguiente manera:

El calor que sale por unidad de tiempo por la superficie extrema S_f que está a una distancia $x= f$, viene dado por la ecuación (5 – 14) cuando $x = f$

$$\left(\frac{\eth Q}{d\tau}\right)_f = -\lambda A\left(\frac{dt}{dx}\right)_f \qquad (5 - 20)$$

Además, como ese calor se cede a través de la sección terminal de la barra, la ecuación (5 – 16) toma la forma

$$\left(\frac{\eth Q}{d\tau}\right)_{SUP.LAT.TERM} = \bar{h}A(t_f-\theta) \qquad (5 - 21)$$

Igualando la (5 – 20) con la (5 – 21) se obtiene

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_f = -\frac{\bar{h}}{\lambda}(t_f-\theta) \qquad (5 - 22)$$

Derivando la (5 – 19) respecto de x en $x = f$ y recordando que θ es constante

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_f = \left[\frac{d}{dx}(t-\theta)\right]_f = aAe^{af} - aBe^{-af} \quad (5 - 23)$$

Por lo tanto, despejando (t - θ) de la (5 – 22) y efectuando los reemplazos se llega a

$$(t_f - \theta) = \frac{1}{\bar{h}A}\left(\frac{\eth Q}{d\tau}\right)_f = -\frac{\lambda}{\bar{h}}a\left[Ae^{af} - Be^{-af}\right] \quad (5 – 24)$$

A medida que la distancia desde el extremo caliente aumenta, la diferencia (t - θ) disminuye y, si la barra es lo suficientemente larga, esa diferencia tiende a cero, es ese caso e^{ax} tiende a infinito, lo que implica que A debe ser forzosamente cero. Además, para $x = 0$, es decir en el extremo caliente $t_1 - \theta = B$. De aquí extraemos la siguiente conclusión: Para una barra lo suficientemente larga sumergida en un fluido a temperatura menor en la cual hay un gradiente de temperaturas, la diferencia de temperaturas entre cualquier punto de la superficie de la barra y el fluido en contacto está dada por

$$t - \theta = (t_1 - \theta)e^{-ax} = (t_1 - \theta)exp\left[-x\sqrt{\frac{\bar{h}\omega}{\lambda A}}\right] \quad (5 - 25)$$

En la (5 – 25) t_1 representa la temperatura del extremo caliente.

La expresión (5 - 25) nos indica que la diferencia de temperaturas entre la barra y el fluido disminuye en forma exponencial con la distancia al extremo caliente.

Referencias Bibliográficas

Incropera F. P. – Dewitt, D., (2000): *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons. New York.

Krasnoschiokov, E.A. – Sukomiel, A.S., (**1977**) *Problemas de termotransferencia*. Editorial Mir. Moscú.

Poulikakos, D., (**1994**): *Conduction Heat Transfer*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, N.J. 1994

Zemansky, M. W. - Dittman R.H., (**1996**): *Heat and Thermodynamics* 7th. Edition. McGraw Hill College Division. N.Y.

Holman, J.P., (**1998**): *Transferencia de calor*, 8ª. Edición, McGraw- Hill Interamericana de España. SAU. Barcelona.

AUTOEVALUACIÓN DE CONTENIDOS CONCEPTUALES

5 - 1. Dado un fluido en contacto con una superficie sólida. ¿A qué se llama capa límite? ¿A qué obedece su comportamiento.
5 - 2. ¿Que entiende por "esfuerzo cortante"?
5 - 3. ¿A qué se llama "coeficiente de viscosidad? ¿Cómo viene medido? ¿En qué unidades se expresa en el SI?
5 - 4. ¿A qué se llama fluido newtoniano?
5 - 5. ¿Qué tipo de curva obtendría al representar el esfuerzo cortante de un fluido newtoniano en función de la velocidad de transformación?
5 - 6. ¿Cuál es la expresión matemática de la ley de Poiseuille? ¿En que casos se aplica?
5 - 7. ¿A qué se llama viscosidad cinemática?
5 - 8. ¿Qué entiende por coeficiente laminar de convección?
5 - 9. ¿A qué se llama coeficiente de transmisión total de una pared?
5 - 10. El llamado "Número de Biot" (B_i) de una pared proporciona una medida de la caída de temperatura en la pared en relación con la diferencia de temperaturas entre la superficie de la pared y el fluido con que contacta. Sea T_1 la temperatura de la pared en contacto con un fluido a la temperatura θ y T_2 la temperatura de la cara opuesta de la pared es $B_i = (T_1 - T_2)/(T_1 - \theta)$ Demostrar que $B_i = hL/\lambda$ siendo h el coeficiente laminar de convección, L el espesor de la pared y λ el coeficiente de conductibilidad térmica de la pared. Usando las unidades S.I. compruebe que B_i es adimensionado.

El mejor método para resolver un problema no garantiza que el resultado sea el correcto.

AUTOEVALUACIÓN DE CONTENIDOS PROCEDIMENTALES

5 - 1. Los llamados "plásticos de Bingham" se caracterizan por que su fuerza de rozamiento viscoso responde a la fórmula general:

$$f_r = f_c + \eta dA \frac{\partial v}{\partial x}$$

donde f_c es un coeficiente conocido como "esfuerzo de ruptura". Indique si los plásticos de Bingham son fluidos newtonianos.
5 - 2. Una diferencia de presión de 0,05 *atm* provoca el flujo laminar de un aceite a través una tubería de acero de 0,10 *m* de diámetro y 3 *m* de largo. La viscosidad media de ese aceite es de 85 poise. Calcular el volumen que circula al cabo de 10 minutos.
5 - 3. El flujo de calor a través de la superficie de un calentador eléctrico es 6000 Wm^{-2}. Cuando el calentador se enfría por aire a 70 ºC, su temperatura es de 130 ºC. Calcular el valor del coeficiente medio de convección. ¿Cuál será la temperatura del calentador si su potencia se reduce hasta producir un flujo de 3000 Wm^{-2}?
5 - 4. Si expresa la densidad de un fluido en g/cm^3 ¿En que unidades expresará las demás propiedades para establecer el Número de Reynolds?
5 - 5. Por una cañería de cobre de una pulgada de diámetro interior circula glicerina en régimen laminar a 15ºC. La diferencia de presión entre dos puntos de esa cañería situados a 1 *m* de distancia es de 1500 *hPa*. Calcular: (a) la velocidad máxima del fluido; (b) la velocidad media; (c) el número de Reynolds y (d) el caudal. La viscosidad de la glicerina a esa temperatura es de 15 poise y su densidad es 1,267 $g.cm^{-3}$
5 - 6. Por un tubo de 5 cm de diámetro y 1 m de largo circula eltilenglicol en régimen laminar. Calcular

a. La velocidad máxima del líquido sabiendo que la diferencia de presiones entre los extremos es de 2 x 10^{-4} *atm* y que η = 0,16 poise.
b. La velocidad media
c. El Número de Reynolds, sabiendo que su densidad es 1,40 $g.cm^{-3}$ ¿Confirma que el fluido circula en régimen laminar?

5 - 5. La sensación de frío que provoca el viento cuando la temperatura ambiente es baja se relaciona con el incremento de la transferencia de calor de la piel al ambiente que la rodea. Suponga que la piel tiene un espesor de 3,2 *mm* y que se mantiene a una temperatura media constante de 36 ºC gracias al flujo sanguíneo. Cuando la temperatura ambiente es de 5 ºC y no hay brisa el coeficiente medio laminar de convección es 20 $W\ m^{2}\ K^{-1}$, pero con vientos de 30 *km/h* alcanza los 60 $W\ m^{-2}\ K^{-1}$. Calcular la pérdida de calor por unidad de área de la piel en un día cuando la temperatura ambiente es de 5º C y (a) no hay viento y (b) el viento sopla a 30 *km/h*.

5 - 6. La pared de un horno de arcilla refractaria cocida tiene un espesor de 0,50 *m* y $\lambda = 1{,}1\ W\ m^{-1}\ K^{-1}$. La temperatura interior del horno es de 680 *K* y la del exterior es 305 *K*. Calcular el coeficiente de transmisión total de la pared sabiendo que las temperaturas en las caras interior y exterior de la pared son 670 y 330 *K* y que los respectivos coeficientes de convección son 25 y 12 $W\ m^{-2}\ K^{-1}$.

5 - 7. Se hace ingresar agua líquida a 100 ºC por una cañería de aluminio de 0,8 *m* de longitud y 1,6 *cm* de diámetro exterior. Alcanzado el régimen estacionario la temperatura del agua en el otro extremo de la cañería es 70,0 ºC. Suponiendo que la temperatura ambiente se mantiene constante en 25,0 ºC, calcular el coeficiente laminar de convección sabiendo que la conductividad térmica media del aluminio en ese rango de temperaturas es 209,0 $W\ m^{-1}K^{-1}$.